

5193  
7. FOLGE, 1959, BAND 2, HEFT 7-8

APR 20  
1959

UNIVERSITY  
OF MICHIGAN

APR 16 1959

PHYSICS  
LIBRARY

# ANNALEN DER PHYSIK

Gegründet 1799 durch F. A. C. Gren  
Fortgeführt durch L. W. Gilbert, J. C. Poggendorff,  
G. und E. Wiedemann, P. Drude, W. Wien,  
M. Planck, E. Grüneisen, F. Möglich

Der ganzen Reihe 457. Band

#### Kuratorium:

W. GENTNER, W. GERLACH, F. HUND, B. KOCKEL,  
M. v. LAUE, W. MEISSNER, W. PAUL, R. W. POHL,  
R. ROMPE, R. SEELIGER, W. WEIZEL

Herausgegeben von

H. KOPFERMANN  
Heidelberg

G. RICHTER  
Berlin



JOHANN AMBROSIUS BARTH / VERLAG / LEIPZIG

Redaktionsschluß am 27. Januar 1959

## Inhalt

W. Wießner, Braunschweig: Zur Kapazität des Dreiplattenkondensators. Mit 6 Abbildungen .....	329
D. Geissler, A. Papapetrou und H. Treder, Berlin: Die Gravitationsstrahlung eines zeitweilig nichtstationären Systems. Mit 3 Abbildungen .....	344
J. Auth und R. Ridder, Berlin: Untersuchungen zur Ladungsträgerdiffusion und zu anderen Formen des Energietransports in CdS. Mit 11 Abbildungen .....	351
H. Achterberg und J. Michel, Greifswald: Einige Ergebnisse über laufende Schichten in Neon-Glimmladungen. Mit 14 Abbildungen .....	365
R. Groth, Marburg/Lahn: Untersuchungen über die Totalreflexion weicher Röntgenstrahlen. Mit 7 Abbildungen .....	380
T. Tietz, Łódź (Polen): Der totale Wirkungsquerschnitt und der Diffusionsstreuquerschnitt von Hartree-Potentialen .....	387
W. Ermisch und R. Seiwert, Berlin: Die Depolarisation der Natrium-Resonanzfluoreszenz. Mit 3 Abbildungen .....	393
K. Werner, Leipzig: Der Einfluß hydrostatischen Druckes auf den Curiepunkt eines Ni-Zn-Ferrites. Mit 5 Abbildungen .....	403
K. W. Böer und H. Wantosch, Berlin: Nichtstationäre Vorgänge in Photoleitern. II. Langzeitiges Anklingen der Photoleitung von CdS-Einkristallen bei schwachen Anregungsintensitäten. Mit 6 Abbildungen .....	406
Y. P. Varshni and R. C. Karnatak, Allahabad (India): On Flammersfeld's Range-Energy Relation for Electrons. With 5 figures .....	413
P. S. Gupta, Calcutta (India): Pulsating Fluid Sphere in General Relativity ....	421
Register für die Bände 1 und 2 .....	425

Für diese Zeitschrift werden grundsätzlich nur Arbeiten angenommen, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung geht das alleinige Recht der Vervielfältigung, Verbreitung und Übersetzung einschließlich des Rechts der Veranstaltung von Sonderdrucken auf den Verlag über. Von jeder Arbeit liefert der Verlag 75 Sonderabzüge kostenlos.

Einsendung der Manuskripte erbeten an:

Prof. Dr. H. Kopfermann, Heidelberg, Albert-Ueberle-Straße 7,  
Prof. Dr. G. Richter, Zeuthen-Miersdorf, Platanenallee 6.

Die Redaktion bittet, die Manuskripte *druckfertig* einzuliefern und in den Korrekturen den bisherigen Raum des Textes nicht zu überschreiten. Die *Zeichnungen* sind in sorgfältiger Ausführung auf besonderen Blättern beizulegen.

Bei den *Zitaten* wolle man die Abkürzungen der Zeitschriftenstitel nach dem *Verzeichnis* wählen, das jedem Jahrgang der „Physikalischen Berichte“ vorangestellt ist.

Die Zeitschrift erscheint in Bänden mit 8 Heften, die zwangslässig ausgegeben werden. Die Lieferung erfolgt durch den Sortimentsbuchhandel, in Ausnahmefällen unmittelbar vom Verlag. Der Bezugspreis beträgt je Band 34.— (U. S. \$ 8.16) zuzügl. Postgebühren.

Die Lieferung erfolgt bis zur Abbestellung, die nur für das Ende eines Bandes ausgesprochen werden kann.

Diesem Heft liegt ein Prospekt des VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, bei.

# ANNALEN DER PHYSIK

7. FOLGE \* BAND 2, HEFT 7-8 \* 1959

## Zur Kapazität des Dreiplattenkondensators

Von W. Wießner\*

Mit 6 Abbildungen

### Inhaltsübersicht

Es wird untersucht, inwieweit sich die von Grüneisen und Giebe bzw. v. Guttenberg für die Kapazität des Dreiplattenkondensators angegebenen Berechnungsformeln, die sich in der Dickenkorrektion unterscheiden, experimentell bestätigen lassen. Als Grundlage des Vergleichs dienen die Ergebnisse von Messungen, bei denen die früher stets vernachlässigten Störungen durch Umgebung, Abschirmung der Zuleitungen und Isolatoren meßtechnisch ausgeschaltet oder mittels einfacher Hilfsmessungen einzeln ermittelt und rechnerisch eliminiert wurden. Die in den Formeln, nicht aber in den Meßergebnissen enthaltene Teilkapazität der Kondensatormittelplatte gegen die unendlich ferne Umgebung wird bei den errechneten Werten als Korrektion berücksichtigt. Ohne diese Korrektion liefern erwartungsgemäß beide Formeln zu hohe Werte; mit Korrektion stimmen die nach v. Guttenberg errechneten Werte mit den Meßergebnissen bis auf rund 0,1% überein. Eine Analyse der vorliegenden Meßwerte führt zu einem neuen empirischen Ansatz für die Dickenkorrektion, der die rechnerische Berücksichtigung der genannten Teilkapazität erübrigt; seine Anwendung liefert Werte, die mit den Meßbefunden bis auf weniger als 0,1% übereinstimmen. Die neue Formel kann zunächst nur für die Plattendicke 0,6 cm und Plattenabstände von 0,2 bis 1,2 cm als bestätigt gelten; ihre Überprüfung in einem größeren Bereich ist in Aussicht genommen. Die Übereinstimmung der gemessenen Werte mit den Ergebnissen rein theoretischer Berechnungen ist befriedigend.

### Einleitung

Für die Berechnung der Kapazität des Dreiplattenkondensators, aufgebaut aus Kreisplatten gleichen Durchmessers und gleicher Dicke, findet man in den Lehrbüchern die von Grüneisen und Giebe<sup>1)</sup> im Jahre 1912 veröffentlichte und in Abschnitt E wiedergegebene Formel (2). Sie setzt sich aus drei Summanden zusammen: dem Anteil für das homogene Feld, der Rand- und der Dickenkorrektion. Die Randkorrektion wurde theoretisch ermittelt, die Dickenkorrektion empirisch.

In seiner Arbeit „Über den genauen Wert der Kapazität des Kreisplattenkondensators“ äußert von Guttenberg<sup>2)</sup> Bedenken gegen die Gültigkeit der

\* Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Bundesanstalt.

<sup>1)</sup> E. Grüneisen u. E. Giebe, Verh. dtsch. physik. Ges. **14**, 921 (1912).

<sup>2)</sup> W. v. Guttenberg, Ann. Physik (6) **12**, 321 (1953).

von Grüneisen und Giebe angewendeten Dickenkorrektion, für die er einen etwas anderen Ansatz (Formel (3)) vorschlägt. Experimentell ist die neue Formel offenbar nicht geprüft worden.

Die vorliegende Arbeit behandelt vor allem die Frage, inwieweit sich die von Grüneisen und Giebe bzw. von Guttenberg für den Dreiplattenkondensator angegebenen Formeln experimentell bestätigen lassen. In zwei früheren Veröffentlichungen, deren Ergebnisse dabei zur Anwendung kommen, wurde beschrieben, wie sich bei exakten Messungen gewisse Störungen meßtechnisch ausschalten oder auf Grund von Hilfsmessungen rechnerisch eliminieren lassen<sup>3)</sup>, und wie ein Einfluß der Zuleitung zum Kondensator auf den Meßwert vermieden werden kann<sup>4)</sup>.

Die für die Kapazität von Zwei- und Dreiplattenkondensatoren bekannten Formeln beruhen auf der Voraussetzung, daß der Ladung der auf Potential befindlichen Platte eine gegensinnige Ladung gleicher Größe entspricht, die sich zum Teil auf der bzw. den Gegenplatten, zum Teil auf einer den Kondensator umschließenden leitenden Hohlkugel mit unendlichem Radius befindet. Eine solche Anordnung ist experimentell nicht realisierbar, weil der Abstand von der praktisch geerdeten, leitenden Umgebung stets endlich ist. Die Formeln enthalten also eine Teilkapazität gegen eine unendlich weit entfernte Fläche, die keineswegs mit der tatsächlich vorhandenen Umgebung identifiziert und, streng genommen, überhaupt nicht verifiziert werden kann. Es ist daher zweckmäßig, die Teilkapazität gegen die Umgebung aus der Messung auszuschließen, d. h. nur die Teilkapazität der Plattsysteme gegeneinander zu messen, weil dies die einzige Möglichkeit ist, die Meßgröße hinreichend sicher zu definieren.

Unter der „Kapazität des Dreiplattenkondensators“ soll demnach im folgenden nur die Teilkapazität seiner beiden Systeme gegeneinander verstanden sein. Der Einfluß der wirklichen Umgebung ist experimentell bzw. rechnerisch zu eliminieren.

Die Untersuchung wurde in drei Einzelfragen aufgelöst:

- Welche Kapazitätswerte ergeben sich, wenn man den Kondensator und seine Zuleitungen wie bei Grüneisen und Giebe anordnet und schaltet?
- Wie ändern sich die Meßwerte, wenn die Außenplatten des Kondensators nicht wie bei Grüneisen und Giebe unmittelbar geerdet, sondern mittels Wagner-Schaltung auf Erdpotential gebracht werden, wodurch die Teilkapazität gegen die Umgebung ausgeschlossen wird?
- Welche Werte erhält man, wenn die Messungen nach den neusten Erfahrungen durchgeführt und die Meßwerte den durch Umgebung, Isolatoren und Abschirmung der Zuleitungen bedingten Korrekturen unterzogen werden?

#### A. Aufbau des Kondensators

Der Kondensator bestand aus Messingplatten von 20 cm Durchmesser und 0,6 cm Dicke. Die Wahl fiel gerade auf diese Abmessungen, weil auch Grüneisen und Giebe<sup>1)</sup> einen Teil ihrer Versuche mit ähnlichen Platten durchgeführt haben.

<sup>3)</sup> W. Wießner, Z. angew. Physik 9, 120 (1957).

<sup>4)</sup> G. Zickner u. W. Wießner, Ann. Physik (7) 1, 70 (1958).

Die Oberflächen der Messingplatten wurden nach dem Abdrehen von Hand geläppt. Ihre nähere Untersuchung ergab, daß die noch vorhandenen Unebenheiten höchstens wenige Mikron betragen, so daß bezüglich daraus resultierender Meßfehler keine Bedenken bestanden. Der Plattendurchmesser ergab sich im Mittel zu  $19,997 \pm 0,002$  cm, die Plattendicke zu 0,600 cm.

Als Distanzhalter und Isolatoren wurden zwischen den Platten je drei kreiszylindrische Quarzglaskörper eingesetzt. Ihre Nennhöhen betragen 0,2 bzw. 0,6 bzw. 1,0 bzw. 1,2 cm.

Die mikrometrisch gemessenen Höhen wichen hiervon um höchstens  $\pm 0,002$  cm ab. Die Durchmesser der Quarze lagen zwischen 0,5 und 1,0 cm. Bei allen Messungen wurden die Quarze stets in den gleichen Kombinationen benutzt.

Die Montage des Kondensators erfolgte, wie früher<sup>4)</sup> beschrieben. Eine Darstellung des Kondensators mit Zuleitungen zeigt Abb. 1.

Bei jedem Zusammenbau des Kondensators wurden die Quarze zur Entfernung von Fettspuren, insbesondere auf ihren Endflächen, mit reinem Alkohol abgewaschen und anschließend mit einem Wildleder sorgfältig getrocknet. Nach dem Zusammenbau wurden (möglicherweise vorhandene) Luftpölster zwischen Quarzen und Platten durch kurzzeitiges Zusammendrücken des Kondensators von Hand ausgetrieben.

### B. Die Messungen

Sämtliche Messungen erfolgten im Substitutionsverfahren gegen Normal-Luftkondensatoren der PTB unter Benutzung der auch früher<sup>3),4)</sup> verwendeten Meßbrücke<sup>5)</sup> (mit — vgl. Abb. 2 — oder ohne Hilfsweg) bei einer Frequenz von 800 Hz, einer Spannung von etwa 100 V und einer Raumtem-

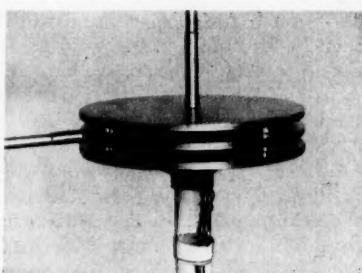


Abb. 1. Dreiplattenkondensator nebst Zuleitungen

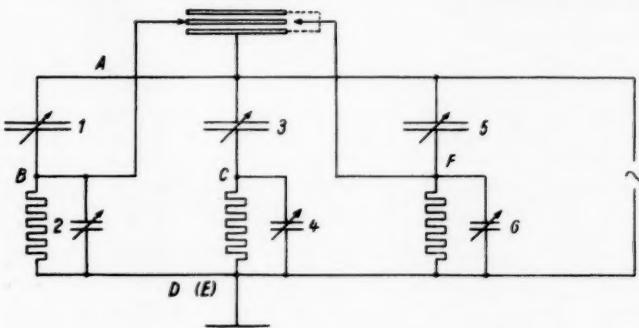


Abb. 2. Schaltung der Meßanordnung

<sup>4)</sup> G. Zickner, Z. angew. Physik 8, 607 (1956).

peratur von etwa  $20^{\circ}\text{C}$ ; letztere wurde durch eine Klimaanlage konstant gehalten, die zudem dafür sorgte, daß eine relative Luftfeuchte von etwa 55% nicht überschritten wurde.

Da es bei diesen Untersuchungen auf die gemessenen Kapazitäten selbst, also nicht nur auf Kapazitätsdifferenzen, ankam, wurde jeweils gegen drei verschiedene Normale bzw. Kombinationen von solchen substituiert.

### 1. Wahl der Trennstelle

Je nach Aufgabenstellung wurde die Schaltung im Eckpunkt *A* oder *D* oder *F* (in Abb. 2 z. B. in *D*) geerdet. Soweit es sich um Messungen ohne Potentialsprung<sup>4)</sup> handelte, kam besondere Bedeutung der Wahl der Trennstelle zu, d. h. jenem Punkt der Zuleitung zu der auf Indikatorpotential liegenden Kondensatorbelegung, an dem beim Übergang zum Brückenabgleich mit Normal der Anschluß an Punkt *F* vorgenommen wird.

Es sei vorausgeschickt, daß die nachstehenden Gesichtspunkte für die Wahl der Trennstelle natürlich nur dann gelten, wenn sämtliche Zuleitungen abgeschirmt sind, da andernfalls ihrer Größe nach unbekannte Zuleitungskapazitäten den Meßwert fehlerhaft vergrößern. Gleichwohl erschien es bei allen Messungen mit abgeschirmten Leitungen als unabdinglich, an den Knickstellen der Leitungsführung auf eine Länge von jeweils etwa 1 cm auf die Abschirmung zu verzichten. Dies war erwünscht, um die mit Auf-, Um- und Abbau der Anordnung verbundenen Lötarbeiten erheblich zu erleichtern.

Grundsätzlich ist die Trennstelle so zu wählen, daß die mit der Umschaltung zwangsläufig verbundenen geringen Lagänderungen einer oder mehrerer Leitungen den Meßwert nicht beeinflussen. Bei Erdung von *A* oder *D* (angewandt bei Voruntersuchungen) besteht das umzuschaltende System aus der Mittelplatte des Kondensators, bei Erdung von *F* aus den Außenplatten. Soweit für die Messungen nicht das Vorbild von Grüneisen und Giebe maßgebend war, wurden die Zuleitungen zu den Außenplatten senkrecht von oben und unten [ähnlich<sup>4)</sup>, Abb. 4], die Zuleitung zur Mittelplatte waagerecht [ähnlich<sup>4)</sup>, Abb. 3] an den Kondensator geführt. Bei Erdung von *A* oder *D*

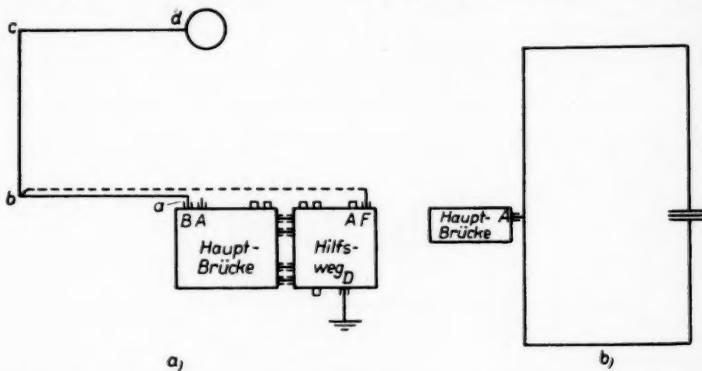


Abb. 3. Zur Lage der Trennstelle (bei Erdung von *D*). a) Leitungsführung zur Mittelplatte; b) Leitungsführung zu den Außenplatten

war daher an einem Punkt des waagerechten Leitungssystems, bei Erdung von  $F$  an einem solchen des senkrechten Systems zu trennen. Bezeichnet man z. B. für Erdung von  $D$  die möglichen Trennstellen im Sinne der Grundrißskizze Abb. 3a (Abb. 3b zeigt das senkrechte Leitungssystem), so folgt: Trennung bei  $a$  oder  $d$ , also in unmittelbarer Nähe eines am Spannungseckpunkt  $A$  liegenden Schaltungsteiles, kommt nicht in Betracht, weil hier durch Änderungen der geometrischen Leiterkonfiguration Meßfehler entstehen können. Da bis an die gewählte Trennstelle von vornherein eine Verbindungsleitung zum Hilfsweg gelegt werden muß, eine Schrägverbindung des Hilfsweges mit Punkt  $c$  aber das Kondensatorfeld stören kann, ist für Erdung bei  $D$  nur der Punkt  $b$  der Leitungsführung als Trennstelle geeignet. Die Verbindung zum Hilfsweg ist in Abb. 3a gestrichelt eingetragen

In kapazitiver Hinsicht bestehen gegen eine solche Wahl der Trennstelle keine Bedenken: Die zu messende Kapazität wird durch die Zuleitung zur Mittelplatte infolge völliger Abschirmung der Zuleitung nicht beeinflußt. Daß bei der Umschaltung auf den Hilfsweg ein Teil der Zuleitung mit umgeschaltet wird, bedeutet lediglich, daß eine vorher zum Brückenzweig 2 parallel liegende Kapazität (Zuleitung gegen geerdetes Schirmrohr) in den Zweig 6 des Hilfsweges verlegt wird. Da der Phasenwinkel in diesem Zusammenhang nicht interessiert, ist die Verlegung ohne Belang.

Bei Erdung von  $F$  erwies sich eine andere Wahl der Trennstelle und damit eine andere Leitungsführung als erforderlich. Das abzutrennende, am Indikatoreckpunkt  $B$  liegende senkrechte Leitungssystem hat nur einen (wegen der Vereinigung der oberen und der unteren Leitung) geeigneten Trennpunkt, nämlich unmittelbar an der Brücke selbst. Die Zuleitung zu der an  $A$  liegenden Mittelplatte wurde deshalb möglichst weit von diesem Trennpunkt entfernt und mit dem Brückeneckpunkt  $A$  über die entsprechende Anschlußbuchse des Hilfsweges (vgl. Abb. 3a) verbunden.

## 2. Messungen nach Grüneisen und Giebe

Es wurde ein Aufbau angestrebt, der möglichst dem historischen entsprach, soweit dieser erinnerungsmäßig noch bekannt war. Die Außenplatten des Kondensators wurden durch einen halbkreisförmigen Drahtbügel miteinander verbunden, von der unter der unteren Platte befindlichen Kontaktrosette ein Draht senkrecht nach unten unmittelbar zur Erdleitung, von der Mittelplatte ein solcher waagerecht zum Punkt  $B$  der Meßbrücke geführt. Alle Verbindungen waren unabgeschirmt und bestanden aus Cu-Draht von 0,1 mm Durchmesser [vgl. <sup>4</sup>), Fußnote 5].

Die Messungen erfolgten ohne Benutzung des Wagnerschen Hilfsweges bei Erdung des Brückeneckpunktes  $A$ .

Für den Brückenabgleich mit dem Substitutionsnormal wurde die Zuleitung zur Mittelplatte des Kondensators unmittelbar an diesem getrennt, aber durch einen neben dem Kondensator stehenden Isolierstab in ihrer Lage festgehalten.

Der Kondensator war von der Meßbrücke nur etwa 25 cm entfernt. Sein Abstand vom Erdboden betrug etwa 100 cm.

### 3. Messungen mit Wagnerschem Hilfsweg

Die Außenplatten des Kondensators waren nicht unmittelbar mit Erde verbunden, sondern an den Brückenpunkt *B* angeschlossen, der durch die Brückenabgleichung auf Erdpotential gebracht wird. Die Zuleitungen waren unabgeschirmt; ihr Verlauf blieb gegenüber den Messungen nach Grüneisen und Giebe in Kondensatornähe ungeändert. Für die Brückeneinstellung mit Substitutionsnormal wurde stets die auf Indikatorpotential liegende Zuleitung unmittelbar am Kondensator getrennt.

### 4. Messungen nach den neuesten Erfahrungen

Die hierbei angewandte Meßmethodik unterschied sich in einigen wesentlichen Punkten von den Vormessungen; sie läßt sich durch folgende Stichworte kennzeichnen: Brücke mit Hilfsweg, Erdung des Punktes *F*, Abschirmung aller Zuleitungen zum Kondensator durch geerdete Messingrohre, Messung ohne Potentialsprung<sup>4)</sup>.

Die Verlegung der Zuleitungen zu den drei Kondensatorplatten geschah nach Entfernung des die Außenplatten verbindenden Drahtbügels entsprechend den Darlegungen in Abschnitt B 1. Die am Brückenanschluß *B* zusammen treffenden Zuleitungen zu den Außenplatten wurden für den Brückenabgleich mit Normal von *B* getrennt und über einen kurzen Draht mit dem geerdeten Brückengehäuse verbunden. Der Kondensator war von der Brücke etwa 100 cm entfernt.

Um störende Streukapazitäten zu vermeiden, wurde von der „Methode des Hochsetzens“ Gebrauch gemacht, die an anderer Stelle bereits ausführlich behandelt ist<sup>6)</sup>). Die dadurch bedingte Korrektion der Meßwerte ist in den in Zahlentafel 3, Zeile 5 aufgeföhrten Werten bereits enthalten.

Die gesamte Meßanordnung wurde vor Beginn der eigentlichen Messungen auf Fehlerfreiheit geprüft, indem an Stelle des Dreiplattenkondensators Normal-Luftkondensatoren eingebaut wurden. Die gemessenen Kapazitätswerte wichen von den für diese Normale bekannten Werten um höchstens  $\pm 0,02 \text{ pF}$  ab. Von dieser Größenordnung sind aber auch die spontanen zeitlichen Schwankungen der Normale.

## C. Die Korrekturen

Korrektionen der unmittelbaren Meßwerte werden bedingt durch alle Gegebenheiten, die die Ausbildung des ungestörten Kondensatorfeldes behindern: durch die eigentliche Umgebung, die Zuleitungen und die zur Distanzierung und Isolierung der Kondensatorplatten verwendeten Quarzkörper. Der Einfluß der Umgebung und der Abschirmung der Zuleitungen auf den Meßwert wurde bereits behandelt<sup>3)</sup>.

### 1. Umgebungskorrektion

Wird eins der beiden Kondensatorsysteme unmittelbar mit Erde verbunden, so wirkt die reale Umgebung gewissermaßen als Teil dieses Systems und bedingt einen meßbar zu hohen Kapazitätswert. Bei den oben erwähnten Erdungsmöglichkeiten tritt dieser Fall dann ein, wenn die Meßbrücke bei *A*

<sup>6)</sup> W. Wießner, Z. Instrumentenkde. 65, 139 (1957).

gerdet wird, das System der Kondensatoraußenplatten also an *A*, die Mittelplatte an *B* liegt.

Bei Erdung des Brückepunktes *D* ist keins der Kondensatorsysteme mit Erde verbunden. Man erhält einen Meßwert, der durch den Einfluß der Umgebung ein wenig verringert ist, weil die Umgebung (Erboden, Wände, Versuchsaufbau) das Kondensatorfeld mehr oder minder stört, einen Teil der Feldlinien bindet und damit einen zu niedrigen Meßwert bedingt. Etwa vorhandene Streukapazitäten in den Brückenzweigen 1 und 3, die beim Übergang vom Brückenabgleich mit Prüfling zu dem mit Normal ihre Größe ändern, können demgegenüber eine — die genannte Verringerung überdeckende — Vergrößerung des Meßwertes bewirken, wie sie z. B. in Zahlen-tafel 1 beim Vergleich der Spalten *D* und *F* erkennbar wird (vgl. auch Abschnitt B 4).

Bei Benutzung eines Wagnerschen Hilfsweges und Erdung bei *F* fallen zwar alle größeren Streukapazitäten (gegen Erde) aus der Messung heraus, doch ist der Meßwert wie bei Erdung von *D* wegen des Vorhandenseins der realen Umgebung nicht völlig fehlerfrei.

Die in den beiden letzten Spalten der Zahlen-tafel 1 aufgeführten Differenzen zeigen, daß bei den heutigen Genauigkeitsansprüchen die Streuung der Mittelplatte gegen die Umgebung nicht mehr vernachlässigt werden kann. Sämtliche Werte der Übersicht sind jeweils aus mehreren Einzelmessungen gemittelt und in pF angegeben<sup>7)</sup>.

Zahlen-tafel 1  
Ergebnisse von Messungen mit verschiedener Erdung

Plattenabstand <i>a</i> (cm)	geerdeter Eckpunkt			Differenzen	
	<i>A</i>	<i>D</i>	<i>F</i>	<i>A</i> — <i>D</i>	<i>A</i> — <i>F</i>
0,2	288,52	287,94		0,58	
1,0	66,02	65,15		0,87	
1,5	45,84	44,82	44,57	1,02	1,27

Es wurde bereits gezeigt<sup>3)</sup>, daß der bei Erdung von *F* noch verbleibende Fehler bei einem allseitigen Abstand des Kondensators von seiner Umgebung von etwa 100 cm und Verwendung von Kondensatorplatten von 1,0 cm Dicke etwa 0,07 pF beträgt. Für den aus Messingplatten von 0,6 cm Dicke aufgebauten Kondensator ist bei sonst gleichen Abmessungen der entsprechende Wert auf etwa 0,05 pF einzuschätzen.

## 2. Rohrkorrektion<sup>8)</sup>

Die Untersuchungen<sup>3)</sup> zeigten weiterhin, daß — innerhalb der Meßunsicherheit unabhängig vom Plattenabstand — die für den Dreiplattenkondensator gemessene Kapazität linear mit der Zahl der waagerechten Abschirmrohre abnimmt. Unter der Annahme, daß die in der feldlinienarmen

<sup>7)</sup> Unter pF sind stets abs. pF zu verstehen.

<sup>8)</sup> Um Verwechslungen mit dem Zuleitungseinfluß<sup>4)</sup> vorzubeugen, wird die vorliegende Korrektion wegen der Art der Zuleitungs-Abschirmung kurz als „Rohrkorrektion“ bezeichnet.

Achse des Kondensators liegenden (senkrechten) Abschirmungen in diesem Zusammenhang ohne Belang sind, ergab sich, daß bei Verwendung eines einzigen waagerechten Abschirmrohres die Kondensatorkapazität um 0,28 pF zu niedrig gefunden wird. Bei 0,6 cm starken Platten dürfte die Korrektion höchstens 0,20 pF betragen. (Warum hier die „Höchst“-Korrektion erörtert ist, wird später ersichtlich werden.)

Zusammenfassend kann man sagen: Die unmittelbaren, bei Erdung von  $F$  erhaltenen Meßwerte sind um 0,05 pF wegen des Einflusses der Umgebung und um 0,20 pF wegen des Einflusses des waagerechten Abschirmrohres, insgesamt also um 0,25 pF, zu erhöhen. Diese Korrektion dürfte höchstens um wenige hundertstel Picofarad fehlerhaft sein.

### 3. Isolatorkorrektion

Außer den genannten Korrekturen ist noch der Einfluß der Isolierquarze zu berücksichtigen. Um festzustellen, um welchen Betrag die Kapazität eines Luftkondensators durch das Einbringen der Distanzquarze gegenüber dem Zustand ohne festes Dielektrikum vergrößert wird, wurde ein nach dem Schutzringprinzip gebauter Kondensator herangezogen. Setzt man die Quarze zunächst zwischen Schutzring und Spannungselektrode, sodann zwischen Meßelektrode und Spannungselektrode ein, so ist die Kapazitätsdifferenz ein Maß für den Einfluß der benutzten Quarze.

Die Ergebnisse einer solchen Untersuchung führen jedoch zu fehlerhaften Schlüssen, wenn Meßelektrode und Schutzring nicht exakt komplanar sind. Bei der Herstellung wurden deshalb beide Systeme unter Benutzung einer ent-

sprechenden Lehre für den Spalt auf einem Pertinaxring verschraubt und dann gemeinsam abgedreht.

Der Wert der Meßergebnisse kann auch dadurch in Frage gestellt werden, daß zwischen Spannungs- und Meßelektrode unter Umständen veränderliche Streukapazitäten auftreten. Um diese auszuschließen, wurde die Meßelektrode durch eine konische, den Schutzring umschließende Haube aus Messingblech abgedeckt. Abb. 4 zeigt den Kondensator bei geschlossener Haube. Die Spannungselektrode liegt unten. Unterhalb des Kondensators sieht man den tragenden Glasrohrständer mit Trolitulkopf sowie die unabgeschirmte Zuleitung zur Spannungselektrode, oberhalb der Haube das Abschirmrohr der Zuleitung zur Meßelektrode.

Das System Abschirmrohr-Haube-Schutzring wurde unmittelbar am

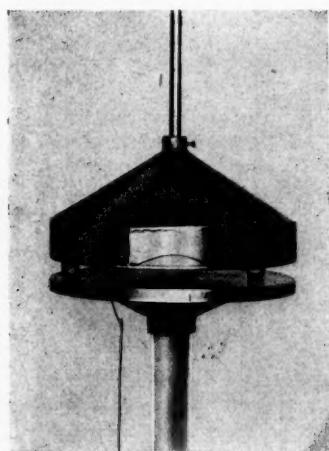


Abb. 4. Schutzringkondensator mit Abschirmhaube

Brückengehäuse geerdet. Die Zuleitung der Meßelektrode erhielt an ihrem Ende (im Inneren der Haube) einen Stecker, der in eine entsprechende axiale Bohrung der Elektrode eingesetzt wurde. Zum Anschluß der Spannungs-

iesem  
eines  
28 pF  
ktion  
örtert  
von F  
bung  
hres,  
stens

uarze  
sität  
über  
dem  
uarze  
Meß  
z ein  
aften  
sind.  
ent-  
auf  
dann

kann  
den,  
elek-  
iche  
diese  
rode  
um-  
ab-  
ator  
ngs-  
des  
den  
wie  
pan-  
das  
lek-

pe-  
am  
rem  
iale  
ngs-

elektrode diente wieder eine Kontaktrosette. Die Meßbrücke war im Punkt *D* geerdet. Die Spannungselektrode des Schutzringkondensators wurde an *A*, die Meßelektrode an *B* angeschlossen.

Für die Untersuchungen wurden die verfügbaren Quarzisolatoren auf Grund genauer Vermessung mit der Mikrometerschraube derart zu Dreiergruppen zusammengestellt, daß sich die Quarze jeder Gruppe in Höhe (*a*) und Durchmesser (*d*) möglichst wenig voneinander unterschieden. Unter diesem Gesichtspunkt ergaben sich insgesamt 11 brauchbare Gruppen, deren Daten aus den ersten drei Spalten der Zahlentafel 2 ersichtlich sind.

Zahlentafel 2  
Isolatorenkorrektion

Anzahl der Gruppen	Maße der Höhe <i>a</i> cm	Quarze Durchm. <i>d</i> cm	$C - C_0$ = $\Delta' C$ pF	$\Delta' C$ pF	$3 \cdot (\Delta' C_{\text{ter}} - \Delta' C_{\text{gem}})$ pF
2	0,2	0,5	0,63	0,21	0,07
1	0,3	0,65	0,73	0,24	0,03
3	0,3	1,0	1,86	0,62	0,02
1	0,6	0,6	0,38	0,13	0,01
2	0,6	0,7	0,48	0,16	0,01
1	1,0	0,75	0,33	0,11	0,00
1	1,2	0,75	0,28	0,09	0,01

Bei jedem Zusammenbau des Kondensators wurden die am Ende des Abschnitts A angegebenen Vorsichtsmaßregeln beachtet.

In Zahlentafel 2 ist als  $C - C_0$  die gemessene Kapazitätsvergrößerung durch die drei jeweils benutzten Quarze, als  $\Delta' C$  der auf den Einzelquarz entfallende Anteil angegeben. Trägt man die Meßwerte  $\Delta' C$  über  $d^2/a$  auf, so zeigt sich, daß sie recht genau auf einer Geraden liegen (Abb. 5), für die sich die Gleichung

$$\Delta' C_{\text{gem}} = 0,188 \frac{d^2}{a} \text{ pF} \quad (1)$$

ergibt.

Unter Anwendung der Formel für das homogene Kondensatorfeld erhält man:

$$\Delta' C_{\text{ber}} = \epsilon_0 (\epsilon_{rQ} - \epsilon_{rL}) \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{d^2}{a}.$$

Dabei ist  $\epsilon_{rQ} = 3,7$  die relative Dielektrizitätszahl für Quarzglas,  $\epsilon_{rL} = 1,00059$  diejenige für Luft. Es wird dann in Übereinstimmung mit (1):

$$\Delta' C_{\text{ber}} = 0,188 \frac{d^2}{a} \text{ pF} \quad (1a)$$

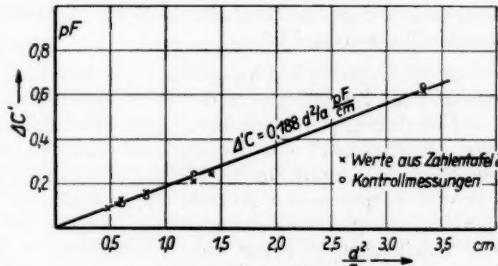


Abb. 5. Isolatorenkorrektion in Abhängigkeit von den Dimensionen des Isolators

Die Differenzen zwischen Rechnung und Meßwerten sind in der letzten Spalte der Zahlentafel 2 aufgeführt (quadratische Mittelwerte). Bei der exakten Kapazitätsbestimmung der verschiedenen Dreiplattenkondensatoren wurden die Quarzkorrekturen stets errechnet<sup>9)</sup>.

#### D. Meßergebnisse und Diskussion

Entsprechend den drei in der Einleitung gestellten Fragen verzeichnet Zahlentafel 3 drei Meßreihen: B 2, B 3 und B 4. Reihe B 2 umfaßt die nach dem Vorbild von Grüneisen und Giebe durchgeföhrten Untersuchungen, bei denen die Außenplatten des Kondensators unmittelbar geerdet waren. Die Abweichungen der Meßwerte (Zeile 3) von den von cm in pF umgerechneten Ergebnissen der genannten Autoren (Zeile 2) erklären sich daraus, daß die Kondensatoren in ihren Daten nicht völlig übereinstimmten.

Zahlentafel 3  
Meßergebnisse in pF

	Plattenabstand . . . . .	0,2 cm	0,6 cm	1,0 cm	1,2 cm
2	Ergebnisse von Grüneisen und Giebe . . . . .	268,9	—	61,2	—
3	Meßreihe B 2 . . . . .	287,72	101,16	62,78	53,09
4	Meßreihe B 3 . . . . .	287,00	100,30	61,69	51,93
5	Meßreihe B 4, unkorrig. Werte . . . . .	286,72	99,95	61,35	51,58
6	Meßreihe B 4, korrig. Werte . . . . .	285,56	99,28	60,97	51,34

Reihe B 3 enthält die Messungen mit Hilfsweg bei Erdung des Punktes *F*, bei denen also die Außenplatten des Kondensators mittelbar auf Erdpotential gebracht wurden. In Übereinstimmung mit den obigen Darlegungen liegen die Meßwerte stets niedriger als diejenigen der Reihe B 2. Die Differenzen wachsen mit wachsendem Plattenabstand. Beide Feststellungen wurden bereits früher ausführlich mitgeteilt<sup>3)</sup>.

Zu Meßreihe B 4, durchgeföhr mit Hilfsweg, bei Erdung von *F*, mit abgeschirmten Zuleitungen und unter Ausschaltung des Potentialsprungs, sind zwei Wertegruppen angegeben. Zeile 5 der Zahlentafel 3 gibt (von der durch das „Hochsetzen“ der Normalkondensatoren bedingten Korrektion<sup>6)</sup> abgesehen) die unmittelbaren Meßwerte wieder, Zeile 6 die nach Anbringung der drei besprochenen Korrekturen erhaltenen Endergebnisse. Die Werte der Zeile 5 liegen noch etwas niedriger als die der Zeile 4, da die Abschirmung der Zuleitungen den von diesen herrührenden Kapazitätsbeitrag beseitigt. Daß die Angaben in Zeile 6 wiederum niedriger liegen als die der Zeile 5, ist durch das Überwiegen der negativen Isolatorkorrektion gegenüber den beiden anderen Korrekturen begründet.

Die in Zeile 5 verzeichneten Meßwerte erwiesen sich bis auf wenige hundertstel Picofarad als reproduzierbar, wenn beim Zusammenbau des Kondensators stets die gleichen Quarze an den gleichen Stellen eingesetzt und die

<sup>9)</sup> Die Einflußgröße  $\Delta C$  nimmt offensichtlich mit wachsender Höhe und sinkendem Durchmesser der Isolatoren ab. Da Grüneisen und Giebe Hartgummikörper von 5 mm Durchmesser und 2, 10, 20, 30 mm Höhe benutzt haben, dürfen bei ihnen die Isolatorkorrekturen kleiner gewesen sein als die in Zahlentafel 2 angegebenen.

Kondensatorplatten genau ausgerichtet wurden. Die absolute Unsicherheit der Meßresultate kann unter Berücksichtigung der experimentell ermittelten Meßunsicherheit, etwa noch vorhandener Bauungenuigkeiten des Kondensators, restlicher Streukapazitäten im Versuchsaufbau, der Undefiniertheit der „Umgebung“ und der zeitlichen Schwankungen der Kapazitätsnormale auf höchstens  $\pm 0,25$  pF beim Plattenabstand 0,2 cm und auf  $\pm 0,15$  pF bei den übrigen Abständen geschätzt werden.

### E. Vergleich der Ergebnisse von Messung und Rechnung

#### 1. Kontrolle der schon bekannten Formeln

Die Untersuchung erstreckte sich auf die Formel von Grüneisen und Giebe<sup>1)</sup>:

$$C = 4\pi \varepsilon \left\{ \frac{r^2}{2a} + \frac{r}{\pi} \left[ 1,1078 + \frac{2}{3} \cdot f\left(\frac{2d}{a}\right) \right] \right\} \quad (2)$$

und diejenige von W. v. Guttenberg<sup>2)</sup>:

$$C = 4\pi \varepsilon \left\{ \frac{r^2}{2a} + \frac{r}{\pi} \left[ 1,1078 + f\left(\frac{d}{2a}\right) \right] \right\}. \quad (3)$$

In diesen Formeln bedeutet  $f(x)$  die Thomsonsche Funktion:

$$f(x) = (x+1) \cdot \ln(x+1) - x \cdot \ln x. \quad (4)$$

Die von W. v. Ignatowski<sup>11)</sup> für den Dreiplattenkondensator aufgestellte Formel setzt unendlich dünne Platten voraus und ist daher für den vorliegenden Fragenkomplex ohne Interesse. Pólya und Szegö<sup>12)</sup> haben überdies gezeigt, daß die Ignatowskische Formel auf der Vorstellung einer gleichförmigen Ladungsverteilung beruht und deshalb auch physikalisch unbefriedigend ist.

Um festzustellen, ob der Meßbefund besser durch die Formel von Grüneisen und Giebe oder diejenige von v. Guttenberg wiedergegeben wird, wurden zunächst die von Grüneisen und Giebe mitgeteilten Werte, die keine der oben diskutierten Korrekturen enthalten, betrachtet. Das Ergebnis zeigt Zahlentafel 4. Die ersten drei Zahlenreihen sind der genannten Arbeit<sup>1)</sup> entnommen, die Kapazitäten aber in pF umgerechnet; sie enthalten diejenigen Angaben, die sich auf Kondensatorplatten von 5,9 mm Dicke beziehen, also angenähert den Verhältnissen bei den vorliegenden Untersuchungen entsprechen. Aus den in Zahlentafel 4 aufgeführten Abweichungen (Zeilen 4 und 6) wird erkennbar, daß offenbar beide Formeln mit wachsendem Plattenabstand an Genauigkeit einbüßen. Den Gängen sind jedoch so starke Schwankungen überlagert, daß eine Mittelwertbildung gerechtfertigt erscheint. Der quadratische Mittelwert der Abweichungen ist bei Grüneisen und Giebe geringer als bei v. Guttenberg.

Will man die gleiche Betrachtung auf die in Zahlentafel 3, Zeile 6 angegebenen, mit allen Korrekturen versehenen Meßwerte anwenden, so ist ent-

<sup>10)</sup> Die von Grüneisen und Giebe nicht veröffentlichte Ableitung der Formel für unendlich dünne Platten ist kürzlich von M. Kohler neu errechnet worden.

<sup>11)</sup> W. v. Ignatowski, Trav. Inst. Phys.-Math. Stekloff 2, Nr. 3 (1932).

<sup>12)</sup> G. Pólya u. G. Szegö, Isoperimetric inequalities in mathematical physics. (Annals of mathematics studies Nr. 27.) Princeton University Press 1951, S. 79.

Zahlentafel 4

Vergleich der Meßwerte von Grüneisen und Giebe mit den nach den Formeln von Grüneisen und Giebe bzw. v. Guttenberg errechneten Werten. (Abweichung = [Rechenwert—Meßwert]: Meßwert; Kapazitäten in pF; Plattenabstand in cm)

						Quadratischer Mittelwert
1	Plattenabstand	0,208	1,0	2,0	3,0	
2	Meßwerte nach Grüneisen-Giebe	268,9	61,2	32,9	23,4	
3	Rechenwerte nach Grüneisen-Giebe	269,9	61,3	33,3	23,8	
4	Abweichung in %	+0,37	+0,16	+1,21	+1,71	1,07
5	Rechenwerte nach v. Guttenberg	269,1	60,3	32,4	23,0	
6	Abweichung in %	+0,07	-1,47	-1,52	-1,71	1,36

sprechend dem eingangs Gesagten zu berücksichtigen, daß beide zur Diskussion stehenden Formeln die Teilkapazität gegen die unendlich ferne Umgebung enthalten, die genannten Meßwerte dagegen nicht. Ein einwandfreier Vergleich ist z. B. möglich, wenn diese Teilkapazität von den berechneten Werten abgezogen wird. Sie läßt sich nach einem von G. Zickwolff ermittelten Verfahren bestimmen. Es liefert für die vorliegenden Plattenabmessungen bei den Abständen 0,598 cm bzw. 1,000 cm die Werte 0,96 pF bzw. 1,14 pF; für den Abstand 1,199 cm fand Zickwolff durch graphische Interpolation den Wert 1,23 pF<sup>13)</sup>. Beim Plattenabstand 0,201 cm dürfte die Teilkapazität schätzungsweise 0,80 pF betragen.

Korrigiert man die nach Grüneisen und Giebe bzw. v. Guttenberg errechneten Kapazitätswerte im beschriebenen Sinn, so führt ein Vergleich mit den vorliegenden Meßergebnissen zu dem in Zahlentafel 5 dargestellten Befund.

Zahlentafel 5

Vergleich der vorliegenden Meßergebnisse mit den entsprechenden nach Grüneisen und Giebe bzw. von Guttenberg errechneten und nach Zickwolff korrigierten Werten. (Abweichung = [korr. Rechenwert—Meßwert]: Meßwert, Kapazitäten in pF; Plattenabstand in cm)

						Quadrat. Mittelwert
1	Plattenabstand	0,201	0,598	1,000	1,199	
2	Meßwerte	285,56	99,28	60,97	51,34	
3	Rechenwerte nach Grüneisen-Giebe	287,54	101,49	63,16	53,61	
4	dto. korrigiert	286,74	100,53	62,02	52,38	
5	Abweichung in %	+0,41	+1,26	+1,72	+2,02	1,48
6	Rechenwerte nach v. Guttenberg	286,71	100,37	62,06	52,55	
7	dto. korrigiert	285,91	99,41	60,92	51,32	
8	Abweichung in %	+0,12	+0,13	-0,08	-0,04	0,10
9	Rechenwerte nach Formel (6)	285,34	99,36	60,92	51,33	
10	Abweichung in %	-0,08	+0,08	-0,08	-0,02	0,07

(Zu Zeile 9 und 10 siehe Abschnitt E 2!)

<sup>13)</sup> Die drei genannten Werte wurden dem Verfasser freundlicherweise von Herrn G. Zickwolff brieflich mitgeteilt, wofür an dieser Stelle bestens gedankt sei. — (G. Zickwolff: Zur Theorie des Dreiplattenkondensators. Diss. TH Braunschweig 1958).

Den „Rechenwerten“ wurden die mikrometrisch bestimmten Abmessungen der verwendeten Kondensatorplatten und Quarze zugrunde gelegt. Es zeigt sich, daß die Abweichungen der korrigierten Rechenwerte nach v. Guttenberg auf weniger als ein Zehntel der Abweichungen zurückgehen, die man bei Anwendung der Formel von Grüneisen und Giebe erhält. Die von W. v. Guttenberg vorgeschlagene Dickenkorrektion stellt demnach – wenigstens für eine Plattendicke von 0,6 cm – eine bemerkenswerte Verbesserung des Berechnungsverfahrens dar; diese Aussage gilt jedoch nur dann, wenn bei Rechnung und Messung die Teilkapazität der Kondensatormittelpalte gegen die unendlich ferne Umgebung in gleicher Weise behandelt, d. h. in beiden Fällen entweder ausgeschlossen oder mit erfaßt wird.

Andererseits muß die Formel von Grüneisen und Giebe mit Rücksicht auf die damaligen Genauigkeitsanforderungen bei der Messung dieser seinerzeit als sehr klein angesehenen Kapazitätsdifferenzen vom Standpunkt der Autoren aus als hinreichend bestätigt angesehen werden. Mangels genauerer Messungen hat sie sich daher bis heute in den Lehrbüchern behauptet.

## 2. Analytische Darstellung der neuen Meßergebnisse

Wie Zahlentafel 5 zeigt, werden die unter Berücksichtigung aller erkennbaren Beeinflussungen gewonnenen Meßwerte (Zeile 2) weder durch den unmittelbaren Berechnungsansatz nach Grüneisen und Giebe (Zeile 3) noch durch den nach W. v. Guttenberg (Zeile 6) innerhalb der Meßunsicherheit richtig wiedergegeben. Wenn auch die Formel von W. v. Guttenberg nach Anbringung der besprochenen Teilkapazitäts-Korrektion zu guter Übereinstimmung mit dem Experiment führt, so haftet doch der Notwendigkeit dieser nachträglichen Korrektion etwas Unbefriedigendes an.

Der Unterschied zwischen den beiden diskutierten Formeln (2) und (3) besteht ausschließlich im Ansatz der Dickenkorrektion. Diese hat in beiden Fällen die allgemeine Form:

$$(\Delta C)_d = 4 \pi \epsilon \cdot \frac{r}{\pi} \cdot \xi \cdot f(x). \quad (5)$$

Grüneisen und Giebe setzten den Zahlenfaktor  $\xi = \frac{2}{3}$  und das Argument  $x = \frac{2d}{a}$ , während v. Guttenberg  $\xi = 1$  und  $x = \frac{d}{2a}$  annimmt. In beiden Fällen wurden die Größen  $\xi$  und  $x$  nach Analogieschlüssen<sup>2)</sup>, d. h. letzten Endes willkürlich, gewählt. Eine solche willkürliche Wahl läßt sich nun aber heute auf der Grundlage der neuen Meßergebnisse in der Weise treffen, daß sich die genannte nachträgliche Korrektion der Rechenwerte erübrigkt, gleichwohl aber eine Übereinstimmung von Messung und Rechnung innerhalb von weniger als 0,1 % erreicht wird.

Der Gang der Abweichungen in Zahlentafel 5, Zeile 5, läßt vermuten, daß der Faktor  $\xi$  seinerseits eine Funktion von  $x$  sein könnte. Rechnet man aus den vorliegenden Meßwerten (Zahlentafel 5, Zeile 2) die Dickenkorrektonen  $(\Delta C)_d$  und aus diesen für verschiedene Argumente  $x$  die zugehörigen Größen  $\xi$  aus, so gelangt man zu dem in Abb. 6 dargestellten Befund. Danach ist  $\xi$  ganz offensichtlich von  $x$  abhängig. Die Art der Kurven legt den Versuch einer linearen Approximation von der Form  $\xi = p - q \cdot \frac{a}{d}$  nahe, für den sich im

Hinblick auf geringstmögliche Abweichungen und runde Zahlenwerte in erster Linie die Kurve für  $x = \frac{2d}{a}$  anbietet. Man erhält damit:

$$\xi = 0,50 - 0,15 \cdot \frac{a}{d}.$$

Während sich also das von Grüneisen und Giebe angewandte Argument  $\frac{2d}{a}$  als brauchbar erweist, muß ihr Faktor  $\xi$  von  $\frac{2}{3}$  auf  $\frac{1}{2}$  verkleinert und außerdem um den nicht unbeträchtlichen, von  $x$  abhängigen Korrektionsterm  $0,15 \cdot \frac{a}{d}$  vermindert werden.

Somit ergibt sich für den Dreiplattenkondensator die von der Teilkapazität gegen die unendlich ferne Umgebung freie Berechnungsformel:

$$C = 4\pi \varepsilon \left\{ \frac{r^2}{2a} + \frac{r}{\pi} \left[ 1,1078 + \left( 0,50 - 0,15 \cdot \frac{a}{d} \right) \cdot f\left(\frac{2d}{a}\right) \right] \right\}. \quad (6)$$

Wendet man diese Formel auf die vorliegenden Kondensatordaten an, so gelangt man zu den Zahlenwerten, die in den Zeilen 9 und 10 der Zahlentafel 5 zusammengestellt sind.

Offensichtlich gelingt es mit Formel (6), ohne zusätzliche Korrektion den Meßergebnissen recht nahe zu kommen. Sie kann jedoch zunächst nur für Plattenabstände von 0,2 bis 1,2 cm und eine Plattendicke von 0,6 cm als

gültig angesehen werden. Daß  $\xi$  und damit die Dickenkorrektion bereits für  $\frac{a}{d} = \frac{10}{3}$ , im vorliegenden Fall also für  $a = 2,0$  cm, gleich Null wird, mag in der Natur der Sache liegen, da die Dickenkorrektion mit wachsendem Plattenabstand tatsächlich schnell an Einfluß verliert. Eine Überprüfung der Formel (6) für andere Kondensatorabmessungen ist in Aussicht genommen.

Zum Schluß sei erwähnt, daß Zickwolff auch die in Zeile 2 der Zahlentafel 5 für die Abstände 0,598 bzw. 1,000 bzw. 1,199 cm angegebenen Meßwerte unter dem Experiment entsprechenden Annahmen rein theoretisch

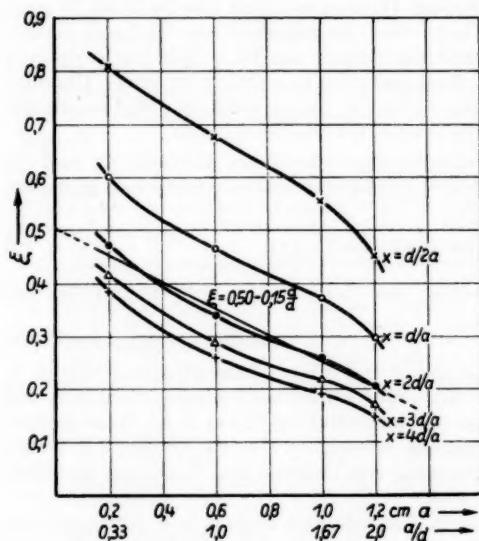


Abb. 6. Zur Ermittlung des Faktors  $\xi$

nachrechnete. Seine Resultate lauten: 99,46 bzw. 60,95 bzw. (durch Interpolation gewonnen) 51,36 pF. Im Hinblick auf die oben erwähnten Fehlermöglichkeiten bei der Messung darf die Übereinstimmung als recht befriedigend angesehen werden. —

An den im vorliegenden Bericht behandelten Untersuchungen hatte der zwischen verstorbene Herr Direktor a. D. Dr. G. Zickner hervorragenden Anteil. Er lieferte nicht nur die Unterlagen für die nach dem Vorbild von Grüneisen und Giebe durchzuführenden Messungen, er entwickelte auch das oben beschriebene Verfahren zur Bestimmung der Isolatorenkorrektion und bemühte sich um die Aufstellung einer neuen Formel für die Kapazität des Dreiplattenkondensators. Den Abschluß der Untersuchungen und der parallel dazu durchgeführten Berechnungen von Zickwolff zu erleben, war ihm leider nicht vergönnt. Der Verfasser des vorliegenden Berichtes gedenkt des Verstorbenen in Dankbarkeit.

Dank gebührt auch Herrn Prof. Dr. M. Kohler (TH Braunschweig), der durch zahlreiche wertvolle Diskussionen zur Klärung der teilweise verwickelten Fragen wesentlich beitrug und durch ständige Anteilnahme den Fortgang der Arbeiten förderte.

Den Herren Helmke, Krühn und Fleischer sei gedankt für ihre freudige Mitarbeit bei dem Versuchsaufbau, der Durchführung der zum Teil technisch recht schwierigen Messungen und der Auswertung der Meßergebnisse.

Braunschweig, Physikalisch-Technische Bundesanstalt.

Bei der Redaktion eingegangen am 26. Juni 1958.

# Die Gravitationsstrahlung eines zeitweilig nichtstationären Systems

Von D. Geissler, A. Papapetrou und H. Treder

Mit 3 Abbildungen

## Inhaltsübersicht

Mit Hilfe der von Weyl angegebenen integralen Form des allgemein-relativistischen Energie-Impuls-Satzes wird gezeigt, daß die von einem zeitweilig nichtstationären System emittierte Gravitationsstrahlung eine nicht verschwindende Gesamtenergie besitzt, die nicht forttransformierbar ist.

§ 1. Ein periodisch von der Zeit abhängiges System emittiert nach Einstein<sup>1)</sup> und Eddington<sup>2)</sup> Gravitationsstrahlung, die mit einer Strömung von Gravitationsenergie verbunden ist. Ein ständig streng periodisch von der Zeit abhängiges Gravitationsfeld wird daher nicht existieren können, was dem Ergebnis von Papapetrou<sup>3)</sup> entspricht.

In die Rechnung Einsteins geht der Pseudotensor  $t_{\mu}^{\nu}$  der Energie-Impuls-Dichte des Gravitationsfeldes ein; man kann daher nicht unmittelbar erkennen, daß sich die Energieströmung nicht wegtransformieren läßt, das Resultat also insbesondere unabhängig von der von Einstein verwendeten Hilbertschen Koordinatenbedingung ist. Es sind deswegen verschiedentlich Zweifel an der physikalischen Realität der Einsteinschen Ergebnisse geäußert worden.

Im folgenden wollen wir die Gravitationsstrahlung eines während eines endlichen Zeitraums periodisch von der Zeit abhängigen Systems mit Hilfe des Theorems von Weyl<sup>4)</sup> über Gesamtenergie und -impuls explizit kovariant berechnen.

Das Weylsche Theorem besagt folgendes: Es sei  $\mathfrak{T}_{\mu\nu}^{\nu}$  die Dichte des Materietensors eines isolierten materiellen Systems und  $t_{\mu}^{\nu}$  der Pseudotensor des zugehörigen Gravitationsfeldes. Für  $\mathfrak{T}_{\mu\nu}^{\nu} + t_{\mu\nu}^{\nu}$  gilt der Einsteinsche Energie-Impuls-Satz

$$\mathfrak{T}_{\mu\nu}^{\nu} + t_{\mu\nu}^{\nu} = 0. \quad (1)$$

<sup>1)</sup> A. Einstein, Berliner Berichte 1918, 154. Vgl. auch W. Pauli, Relativitätstheorie, Enzykl. d. Math. Wiss. Bd. V 2, 1921.

<sup>2)</sup> A. S. Eddington, Relativitätstheorie in mathematischer Behandlung, Berlin 1925.

<sup>3)</sup> A. Papapetrou, Ann. Physik (6) 20, 399 (1957); (7) 1, 186 (1958).

<sup>4)</sup> H. Weyl, Raum-Zeit-Materie, Berlin 1923, §§ 37, 38. Vgl. auch A. Einstein, Berliner Berichte 1918, 448.

Aus (1) folgt, daß die Integrale

$$c P_\mu = \int_{x^0 = \text{const}} (\mathfrak{T}_\mu^0 + t_\mu^0) dV, \quad (2)$$

genommen über eine raumartige Hyperebene  $x^0 \equiv c t = \text{const}$ , immer dann einen vierdimensionalen Vektor bilden, wenn sie konvergieren. Für diese Konvergenz ist notwendig, daß a) der Raum im Unendlichen der Hyperebene  $x^0 = \text{const}$  genügend schnell in den ebenen Raum übergeht und daß b) das Koordinatensystem im Unendlichen so gewählt wird, daß  $g_{\mu\nu}$  asymptotisch konstante Werte annimmt.

$P_\mu$  ist dann ein vierdimensionaler Vektor in bezug auf beliebige Koordinatentransformationen im Endlichen, für die — wegen der Bedingung b) — nur zu fordern ist, daß sie im Unendlichen in die allgemeinen Lorentz-Transformationen übergehen. Für diesen vierdimensionalen Vektor folgt aus (1) der integrale Erhaltungssatz

$$\frac{dP_\mu}{dt} = 0. \quad (3)$$

$P_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) ist der Gesamtimpuls und  $c P_0 \equiv E$  die Gesamtenergie des isolierten Systems.

In der speziellen Relativitätstheorie ( $t_\mu^0 = 0$ ,  $\mathfrak{T}_\mu^0 \rightarrow T_{\mu\nu}$ ) sprechen wir von einer Aufspaltung des Gesamtsystems in isolierte Teilsysteme, wenn der Tensor  $T_{\mu\nu}$  nur innerhalb einiger voneinander getrennter (röhrenförmiger) Gebiete des vierdimensionalen Raums von Null verschieden ist. Dann läßt sich aus dem differentiellen Erhaltungssatz (1),

$$T_{\mu\nu\nu} = 0,$$

ein integraler Erhaltungssatz von der Form (3) sowohl für das Gesamtsystem als auch für jedes einzelne Teilsystem ableiten. Als Beispiel betrachten wir den durch Abb. 1 veranschaulichten Fall: Für  $t < 0$  liegt ein einziges in einem endlichen Bereich lokalisiertes System vor, das zur Zeit  $t = 0$  in zwei voneinander isolierte Systeme aufspaltet. Der integrale Erhaltungssatz ergibt für die einzelnen Teilsysteme

$$\int_{V_n} T_{\mu 0} dV = c P_\mu = \text{Vierervektor} = \text{const},$$

wobei  $V_n$  derjenige Teilbereich der Hyperebene  $x^0 = \text{const}$  ist, in dem nur das  $n$ -te Teilsystem enthalten ist. Für das Gesamtsystem gilt ebenfalls

$$\int_{x^0 = \text{const}} T_{\mu 0} dV = c P_\mu = \text{Vierervektor} = \text{const}$$

mit

$$P_\mu = \sum_n P_\mu. \quad (4)$$

Auch in der allgemeinen Relativitätstheorie dürfen wir von isolierten Teilsystemen sprechen, wenn die Summe  $\mathfrak{T}_\mu^0 + t_\mu^0$  nur innerhalb von getrennten Gebieten von Null verschieden ist und außerhalb dieser Gebiete so schnell

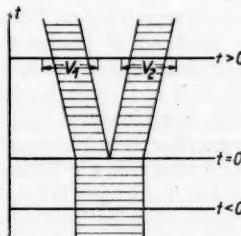


Abb. 1. Nur im schraffierten Gebiet ist  $T_{\mu\nu} \neq 0$

verschwindet, daß die über Teilbereiche  $V_n$ <sup>5)</sup> der Hyperebene  $x^0 = \text{const}$  berechneten Integrale

$$\int_{V_n} (\mathfrak{T}_\mu + t_\mu^0) dV = c_n P_\mu \quad (5)$$

konvergieren. Der Weylsche Satz läßt sich dann auch auf jedes einzelne Teilsystem anwenden und ergibt

$$\frac{d}{dt} P_\mu = 0.$$

Ferner sind für jedes  $n$  die vier Größen  $P_\mu$  Komponenten eines Vierervektors der Minkowskischen Grenzmetrik, die jetzt nicht nur im Unendlichen, sondern auch in den Zwischengebieten gelten muß. Die Integrale  $P_\mu$  des Gesamtsystems sind wieder durch die Beziehung (4) gegeben.

§ 2. Ein ständig periodisch von der Zeit abhängiges System besitzt gemäß Papapetrou<sup>3)</sup> eine divergierende Gesamtenergie. Für die Anwendbarkeit des Weylschen Theorems ist also erforderlich, daß wir ein System betrachten, das nur während eines endlichen Zeitintervalls periodisch von der Zeit abhängt. Von einem derartigen System wollen wir uns folgende Modellvorstellungen machen:

Zustand *A* (realisiert in dem unendlichen Zeitintervall  $t < 0$ ): Das materielle System besteht aus einem um seine Symmetrieachse rotierenden axialsymmetrischen Körper.

Zustand *B* (realisiert in dem endlichen Zeitintervall  $0 \leq t \leq T$ ): Der Körper ist durch innere Kraftwirkungen in zwei gleiche Teile zerlegt worden, die sich auf einer Kreisbahn mit konstanter Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um ihren gemeinsamen Schwerpunkt bewegen, wobei die Geschwindigkeit klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit sein soll. Bei dieser Kreisbewegung kann man sich die Winkelgeschwindigkeit und den Radius der Kreisbahn der beiden Teilkörper entweder so bestimmt denken, daß das System durch sein eigenes Gravitationsfeld zusammengehalten wird, oder man kann sich die beiden Körper auch durch irgendwelche inneren Kräfte miteinander verbunden denken.

Zustand *C* (realisiert im unendlichen Zeitintervall  $t > T$ ): Die beiden Körper haben sich wieder zu einem rotierenden axialsymmetrischen Körper vereinigt<sup>6)</sup>.

Die Übergänge *A*  $\rightarrow$  *B* und *B*  $\rightarrow$  *C* kann man sich durch irgendwelche inneren Kräfte realisiert denken, von denen nur vorausgesetzt wird, daß sie nur während einer hinreichend kurzen Zeit ( $\ll T$ ) wirken, so daß der von ihnen herrührende Beitrag zum gesamten Gravitationsfeld vernachlässigt werden kann.

Wenn das beschriebene materielle System die einzige Quelle des betrachteten Gravitationsfeldes sein soll, haben wir nur retardierte Lösungen der Gravitationsgleichungen zu benutzen und einfallende Wellen auszuschließen. Wir erhalten so für alle Zeiten  $t < 0$  ein stationäres Gravitationsfeld. Für

<sup>5)</sup> Streng genommen werden in diesem Fall die Gebiete  $V_n$  unendlich; siehe unten die Diskussion zu Abb. 3.

<sup>6)</sup> Da das System im Zustand *B* notwendig einen Drehimpuls besitzt, muß der Körper in den Zuständen *A* und *C* rotieren.

const

(5)

einzelne

ektors

lichen,

 $P_\mu$  des

gemäß

barkeit

sichten,

zeit ab-

ellvor-

as ma-

renden

): Der

ordnen,

 $\omega$  um

klein

Bewegung

an der

sein

sich die

er ver-

beiden

Körper

welche

aß sie

r von

lässtigt

trach-

n der

ießen.

Für

unten

Körper

alle Zeiten  $t \gg T$  ist das Gravitationsfeld in einem Gebiet von der Form einer Kugelschale der Dicke  $c T$ , deren Radius sich gemäß den Ergebnissen von Lichnerowicz<sup>7)</sup> mit Lichtgeschwindigkeit ausdehnt, zeitabhängig. Innerhalb und außerhalb der Kugelschale haben wir ein stationäres Gravitationsfeld, und zwar außerhalb das vom Zustand  $A$  und innerhalb das vom Zustand  $C$  erzeugte Feld.

Das Gesamtfeld für alle Zeiten können wir qualitativ auch dadurch beschreiben, daß wir die für makroskopische Probleme physikalisch vernünftige Annahme machen, daß das Gravitationsfeld überall schwach und die Entwicklung

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \frac{g_{\mu\nu}}{2} + \dots \quad (6)$$

möglich ist. Nach den Ergebnissen von Papapetrou darf man annehmen, daß diese Entwicklung konvergiert, weil das Feld nur während eines endlichen Zeitintervalls zeitabhängig ist. Indem wir geeignete Koordinatenbedingungen einführen, erhalten wir für die einzelnen  $g_{\mu\nu}$  jeweils inhomogene Wellengleichungen. Das oben beschriebene Gesamtfeld ist dann dadurch gegeben, daß in die Entwicklung (6) jeweils die retardierten Lösungen dieser Wellengleichungen eingesetzt werden.

In Abb. 2 ist die Verteilung des Gravitationsfeldes für einen sehr großen positiven Zeitwert  $t$  in großer Entfernung  $r$  vom (im Ursprung gelegenen)felderzeugenden System schematisch dargestellt. Das Feld  $g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}$  nimmt wie  $r^{-1}$  ab und ist nur in einem Streifen der Breite  $c T$  zeitabhängig. Dieser Streifen wandert mit Lichtgeschwindigkeit  $c$  nach außen.

§ 3. Betrachten wir nun die energetischen Verhältnisse in den drei Zuständen unseres Systems:

Zustand  $A$  ( $t < 0$ ): Das Feld ist stationär und  $g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}$  nimmt wie  $r^{-1}$  nach außen ab. Bei einem solchen Feld nimmt  $t_\mu^\nu$  wie  $r^{-4}$  ab. Die Voraussetzungen des Weylschen Theorems sind also erfüllt, und wir erhalten nach (1) und (2)

$$E_A = \int_{x^0 = \text{const}} (\mathfrak{D}_0^0 + t_0^0) dV = \text{const}, \quad (7)$$

wobei sich die Größen  $E_A$ ,  $\mathfrak{D}_0^0$  und  $t_0^0$  auf den Zustand  $A$  beziehen. Da das Feld nicht von der Zeit abhängt, dürfen wir nach einem Satz von Tolman<sup>8)</sup> statt (7) auch schreiben

$$E_A = \int_{x^0 = \text{const}} (\mathfrak{D}_0^0 - \mathfrak{D}_1^0) dV = \text{const}. \quad (8)$$

Zustand  $B$  ( $0 \leq t \leq T$ ): Die beiden Teilkörper bilden ersichtlich ein periodisch von der Zeit abhängiges System (Periode  $2\pi/\omega$ ), dessen Einstein-

<sup>7)</sup> A. Lichnerowicz, Théories Relativistes de la Gravitation et de l'Électromagnétisme, Paris 1955, Kapitel 2 und 3.

<sup>8)</sup> R. C. Tolman, Relativity, Thermodynamics and Cosmology, Oxford 1934, § 92.

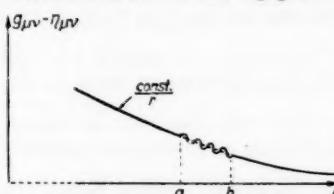


Abb. 2. Schematische Darstellung des Gravitationsfeldes eines Systems, dessen periodische Zeitabhängigkeit von endlicher Dauer ist, für sehr großes positives  $t$

sches Inertialmoment

$$D^{ik} = \int \varrho (3 x^i x^k - r^2 \delta^{ik}) dV$$

von Null verschieden ist.

Zustand  $C$  ( $t > T$ ): Die Voraussetzungen des Weylschen Theorems sind für alle endlichen  $t$ -Werte auch jetzt erfüllt, da sich im Bereich  $r \rightarrow \infty$  das vom Zustand  $A$  erzeugte Feld befindet. Nach diesem Theorem beträgt die Gesamtenergie auch zu allen Zeiten  $t > T$  wieder  $E_A$ , obwohl jetzt  $t_0^0$  in einem Teil des Integrationsgebiets zeitabhängig ist.

Wird nun gemäß Einstein und Eddington im Zustand  $B$  Gravitationsstrahlung ausgestrahlt und existiert diese Gravitationsstrahlung unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems, so muß die Energie des stationären Endzustandes  $E_C$  kleiner sein als die Gesamtenergie  $E_A$ , wobei  $E_A - E_C$  unabhängig vom gewählten Koordinatensystem ist.

Um dies nachzuprüfen, betrachten wir das Gravitationsfeld zu einem sehr großen positiven Zeitwert  $t$ . Wir haben drei Bereiche zu unterscheiden (s. Abb. 2):

1.  $r < a$ , mit  $a \approx c(t - T)$ . Das Feld röhrt her von der stationären Materieverteilung im Zustand  $C$ :  $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^C$ .

2.  $a < r < b$ , mit  $b \approx c t$ . Hier befindet sich das Feld der zeitlich periodischen Materieverteilung im Zustand  $B$ :  $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^B$ .

3.  $r > b$ . Das Feld in diesem Gebiet wird von der stationären Materieverteilung im Zustand  $A$  erzeugt:  $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^A$ .

Die Radien der beiden Kugelflächen, die die drei Bereiche trennen, wachsen mit Lichtgeschwindigkeit.

Die Energiedichte  $t_0^0$  des Gravitationsfeldes nimmt für große  $r$ -Werte wie  $1/r^4$ , dagegen beim zeitabhängigen Gravitationsfeld nach Einstein<sup>1)</sup> nur wie  $1/r^2$  ab<sup>9)</sup>. Somit ergibt sich für einen sehr großen positiven Zeitwert der in Abb. 3 gezeigte Verlauf der Energiedichte  $t_0^0$ : Die gesamte Energie<sup>10)</sup> des stationären Zustandes  $C$  befindet sich im wesentlichen innerhalb der Kugel mit dem Radius  $a$ . (Dies gilt streng für  $t \rightarrow +\infty$ .) Die Energiedichte  $t_0^0$  des zeit-

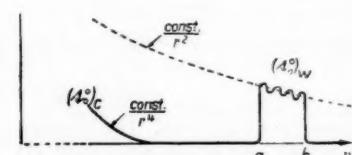


Abb. 3. Schematische Darstellung der Energiedichte  $t_0^0$  eines Systems, dessen periodische Zeitabhängigkeit von endlicher Dauer ist, für sehr großes positives  $t$

Dicke  $c T$ . Die Energie im Außenbereich ( $r > b$ ) ist schon für große  $t$  nachlässigbar klein geworden und verschwindet streng für  $t \rightarrow \infty$ <sup>11)</sup>.

<sup>9)</sup> Vgl. auch L. Landau u. E. Lifshitz, The Classical Theory of Fields, Cambridge (Mass.) 1951, Kap. 11 § 12, und W. Fock, Rev. mod. Physics 29, 325 (1957).

<sup>10)</sup>  $t_0^0$  ist ja nur innerhalb eines kleinen zentralen Bereiches von Null verschieden.

<sup>11)</sup> Aus  $t_0^0 \sim r^{-4}$  ergibt sich nämlich

$$\int_{r \geq ct} t_0^0 dV \sim \frac{1}{r} \sim \frac{1}{t}.$$

Da wir auch jetzt im Unendlichen das Feld  $g_{\mu\nu}$  haben, können wir gemäß dem Satz von Weyl über den gesamten Raum integrieren und erhalten wegen(3)

$$\int_{r^* = \text{const} > cT} (\mathfrak{E}_0^0 + t_0^0) dV = E_A. \quad (9)$$

Dabei ist  $\mathfrak{E}_0^0 = \mathfrak{E}_c^0$  die Energiedichte der stationären Materieverteilung  $C$ .

Andererseits zerfällt aber  $t_0^0$  gemäß Abb. 3 für genügend große Zeiten  $t$  in zwei getrennte Bereiche, so daß wir für (9) auch schreiben können

$$\int_C (\mathfrak{E}_0^0 + t_0^0) dV + \int_W t_0^0 dV = E_A. \quad (10)$$

Dabei bedeutet  $C$  den dem stationären Feld entsprechenden zentralen Bereich  $r < a$  und  $W$  das Wellengebiet  $a < r < b$ . Es handelt sich hier also um den in Abb. 1 schematisch dargestellten Fall mit dem einzigen Unterschied, daß jetzt das eine Gebiet das andere umgibt.

Der erste Term der rechten Seite ist die Gesamtenergie  $E_C$  des stationären Zustandes  $C$ ,

$$E_C = \int_C (\mathfrak{E}_0^0 + t_0^0) dV, \quad (11)$$

die wir nach dem Satz von Tolman auch in der Form

$$E_C = \int_C (\mathfrak{E}_0^0 - \mathfrak{E}_i^i) dV$$

darstellen können.

Für die Berechnung des letzten Terms von (10) bemerken wir, daß für genügend große  $t$  das Gesamtfeld im Gebiet  $W$  notwendig schwach sein wird. Es reicht daher aus, in erster Näherung zu rechnen. In dieser Näherung ist die Energiedichte im Gebiet  $W$ ,  $t_0^0$ , durch die Formeln von Einstein<sup>1)</sup>, Fock und Landau-Lifshitz<sup>9)</sup> gegeben:

$$\frac{t_0^0}{W} = \frac{k \omega^6}{144 \pi c^6} \cdot \frac{1}{r^2} [(D_{ik} n^i n^k)^2 + 2 D_{ik} D^{ik} - 4 n^k n^l D_{ik} D_l^i] \quad (12)$$

$$\left( n^i = \frac{x^i}{r}, k = \text{Newton'sche Gravitationskonstante} \right).$$

Da die Emission der Gravitationsstrahlung während eines endlichen Zeiträums erfolgt, machen wir ferner nur einen Fehler zweiter Ordnung, wenn wir annehmen, daß in diesem Zeitraum die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  und der Betrag  $(D_{ik} D^{ik})^{\frac{1}{2}}$  des Inertialmoments konstant sind. Dann erhalten wir mit (12) aus (10) durch Ausführung der Integration im zweiten Term

$$E_A = E_C + \frac{k \omega^6 T}{45 c^5} D_{ik} D^{ik}, \quad (13)$$

wobei  $E_C$  durch (11) gegeben ist. Setzen wir

$$E_W = \frac{k \omega^6 T}{45 c^5} D_{ik} D^{ik}, \quad (13a)$$

so lautet die Energiebilanz also

$$E_A = E_C + E_W. \quad (14)$$

Die durch (13a) gegebene Energie  $E_W$ , um die sich die Energie des statio-nären Zustandes  $A$  von der des stationären Zustandes  $C$  unterscheidet, stimmt dabei mit dem Wert der Strahlungsenergie überein, der sich aus den Formeln von Einstein<sup>1)</sup>, Pauli und Landau-Lifshitz<sup>9)</sup> für unser System im Zustand  $B$  ergibt. Nach diesen Formeln beträgt der Strahlungsfluß  $J$  durch eine das System umgebende geschlossene Kugelfläche von sehr großem Radius

$$J = \frac{k}{45 c^5} \omega^6 D_{ik} D^{ik}. \quad (15)$$

Mit der obigen Annahme angenähert konstanter  $\omega$  und  $(D_{ik} D^{ik})^{\frac{1}{2}}$  ergibt sich aus (15) der Betrag der während der Emissionsdauer  $T$  emittierten Strahlungsenergie  $E_W$  zu (13a). Ist  $m = \frac{E_A}{C^2}$  die Gesamtmasse des Systems und  $R$  der Radius der Kreisbahn, auf der sich die Teilkörper im Zustand  $B$  bewegen, so gilt nach Landau-Lifshitz

$$D_{ik} D^{ik} = 36 m^2 R^4.$$

Demnach wird

$$E_W = \frac{4}{5} \frac{k}{c^5} \omega^6 m^2 R^4 T. \quad (16)$$

Diese Strahlungsenergie  $E_W$  läßt sich durch keine Koordinatentransformation zum Verschwinden bringen, wenn man an der physikalisch zwingenden Forderung festhält, daß bei diesen Transformationen sowohl im Unendlichen als auch in dem Gebiet zwischen dem zentralen Bereich  $C$  und der Wellenzone  $W$  die  $g_{\mu\nu}$ , bei  $t \rightarrow +\infty$  die Minkowskische Form be-halten. Diese Nichtforttransformierbarkeit folgt unmittelbar aus dem erweiterten Weylschen Satz (5):  $E_C$  und  $E_W$  sind die Nullkomponenten von vierdimensionalen Vektoren, deren raumartige Komponenten aus Symmetriegründen verschwinden.

Wir müssen daraus schließen, daß die von Einstein gefolgerete Gravitationsstrahlung eines zeitweilig nichtstationären Systems einen realen physika-lischen Prozeß darstellt, der mit dem Transport von Energie verbunden ist.

**Berlin, Forschungsinstitut für Mathematik der Deutschen Akademie der Wissenschaften.**

Bei der Redaktion eingegangen am 25. Juni 1958.

stationär  
bestimmt  
Formeln  
dem im  
durch  
Radius  
(15)  
ergibt  
tierteren  
systems  
and B

(16)  
trans-  
zwin-  
n Un-  
sich C  
m be-  
m er-  
n von  
metrie-  
avita-  
physika-  
en ist.  
ie der

## Untersuchungen zur Ladungsträgerdiffusion und zu anderen Formen des Energietransports in CdS

Von J. Auth und R. Ridder

Mit 11 Abbildungen

### Inhaltsübersicht

Mit Hilfe eines näher beschriebenen Verfahrens wird die Konzentrationsverteilung der Ladungsträger in teilweise beleuchteten CdS-Kristallen bei Zimmertemperatur und  $80^\circ\text{C}$  untersucht. Es ergibt sich, daß zwei exponentielle Konzentrationsabfälle mit um Größenordnungen verschiedenen charakteristischen Längen sich aneinander anschließen. Für den ersten, steileren Konzentrationsabfall ergeben sich Diffusionslängen von 3 bis  $15\text{ }\mu$  bei nicht bewußt aktivierten, von  $3\text{ }\mu$  bei Mn-aktivierten und um  $27\text{ }\mu$  bei Ag-aktivierten Kristallen. Er hängt ab von Größe und Richtung der angelegten Spannung. Für den zweiten, flacheren Konzentrationsabfall ergaben sich „Diffusionslängen“ von 0,2 bis 1,25 mm für nicht bewußt aktivierte und 0,15 bis 0,3 mm für Ag-aktivierte Kristalle. Der Einsatzpunkt des zweiten, flacheren Konzentrationsabfalls variiert von Kristall zu Kristall stark und ist deutlich temperaturabhängig. Bei Kristallen einer bestimmten Herkunft fehlt der flache Konzentrationsabfall ganz. Der erste, steilere Abfall wird als „ambipolare“ Diffusions der Ladungsträger gedeutet. Die Lebensdauer der Löcher ergibt sich dann zu  $10^{-9}$  bis  $10^{-7}$  sec (unter der Annahme  $D_p \approx 5\text{ cm}^2/\text{sec}$ ). Der zweite, flachere Abfall ist im wesentlichen durch Reabsorption von Lumineszenzlicht bedingt. Durch besondere Experimente wird gezeigt, daß das Lumineszenzlicht bei CdS Photoleitfähigkeit zu erzeugen vermag.

### 1. Methode

Belichtet man einen photoleitenden Kristall nur teilweise (Abb. 1), so diffundieren die durch das Licht erzeugten Elektronen bzw. Löcher auch in den dunklen Teil des Kristalls und es entsteht schließlich eine bestimmte stationäre räumliche Konzentrationsverteilung. Zusätzlich kann z. B. noch Excitonendiffusion oder Lumineszenzreabsorption einen Beitrag zum Energietransport liefern. Es ist das Ziel der vorliegenden Arbeit, an teilweise beleuchteten CdS-Kristallen diese Fragen zu untersuchen.

Zur Ausmessung der Konzentrationsverteilung der Ladungsträger benutzen wir ein bereits früher beschriebenes Verfahren<sup>1)</sup>, das

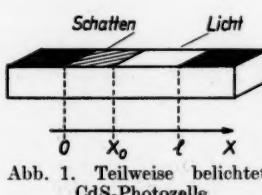


Abb. 1. Teilweise beleuchtete CdS-Photozelle

<sup>1)</sup> J. Auth u. E. A. Niekisch, Z. Naturforsch. **10a**, 1035 (1955).

hier noch einmal kurz skizziert werden soll. CdS ist bekanntlich ein ausgesprochener  $n$ -Leiter; dies bezieht sich sowohl auf die Photo- wie auch auf die Dunkelleitfähigkeit<sup>2)</sup><sup>3)</sup>. Für die Stromdichte gilt daher

$$j = e n \mu_n \mathfrak{E} + e D_n \operatorname{grad} n \quad (1)$$

( $\mu_n$ ,  $D_n$  = Beweglichkeit und Diffusionskonstante für die Elektronen). Ist unser teilweise beleuchteter CdS-Kristall hinreichend dünn<sup>4)</sup> und homogen, so können wir das Problem als eindimensional betrachten und die Konzentration der Elektronen wird nur vom Abstand von der Licht-Schatten-Grenze abhängen. Die Funktion  $n(x, x_0)$ , die die Elektronenkonzentration an der Stelle  $x$  für den Fall angibt, daß die Schattengrenze bei  $x_0$  liegt, hat also für nicht zu kleine Werte von  $(l - x_0)$  die Form

$$n(x, x_0) = n(x_0 - x). \quad (2)$$

$n(x)$  beschreibt die Konzentrationsverteilung in einem in  $x$ -Richtung unendlich ausgedehnten Kristall, der für  $x < 0$  beleuchtet ist und für  $x > 0$  im Schatten liegt. Löst man (1) nach  $\mathfrak{E}$  auf und integriert man über die  $x$ -Richtung, so erhält man

$$\int_0^l \mathfrak{E}_x dx = \frac{j}{e \mu_n} \int_0^l \frac{dx}{n(x_0 - x)} - \frac{k T}{e} \ln \frac{n(x_0 - l)}{n(x_0)}.$$

Für die am Kristall gemessene Spannung  $U(x_0)$  gilt

$$U(x_0) = \int_0^l \mathfrak{E}_x dx + \Delta.$$

$\Delta$  ist die Differenz der Potentialsprünge an den Kontakten und es gilt näherungsweise

$$\Delta \approx \frac{k T}{e} \ln \frac{n(x_0 - l)}{n(x_0)}; \quad (3)$$

(3) gilt exakt, wenn die Photoelektronen eine Boltzmann-Verteilung besitzen und ihre Quasifermigrenze an den Kontakten stetig in die Fermigrenze der Elektronen des Kontaktmetalls übergeht; siehe auch<sup>5)</sup>. Für den Widerstand  $R(x_0) = A U(x_0)/j$  ( $A$  ist ein geometrischer Faktor) gilt also

$$R(x_0) = \frac{A}{e \mu_n} \int_0^l \frac{dx}{n(x_0 - x)}. \quad (4)$$

Durch Differentiation nach  $x_0$  erhält man hieraus

$$dR(x_0)/dx_0 = (A/e \mu_n) [1/n(x_0) - 1/n(x_0 - l)]. \quad (5)$$

Für nicht zu kleine Werte von  $(l - x_0)$  gilt

$$1/n(x_0 - l) = R(0) e \mu_n / l A = 1/n_0 \quad (6)$$

( $n_0$  = Elektronenkonzentration im vollständig belichteten Kristall). Folglich ist

$$n(x_0)/n_0 = [(l/R_0) dR(x_0)/dx_0 + 1]^{-1}. \quad (7)$$

<sup>2)</sup> H. Diedrich, Ann. Physik 13, 349 (1953).

<sup>3)</sup> E. A. Kröger, H. J. Vink u. I. Volger, Physica 20, 1095 (1955).

<sup>4)</sup> Diese Forderung wird weiter unten präzisiert.

<sup>5)</sup> L. Landau and E. Lifshitz, Phys. Z. d. SU 9, 477 (1936).

Da die auf der rechten Seite auftretenden Größen sich im Prinzip leicht messen lassen, liefert uns Gl. (7) ein einfaches Verfahren zur Bestimmung der relativen Konzentrationsverteilung  $n(x_0)/n_0$ .

## 2. Apparative Aufbau

Es leuchtet unmittelbar ein, daß die praktische Leistungsfähigkeit unseres Verfahrens in erster Linie durch die Schärfe der verwendeten Licht-Schatten-Grenze bestimmt wird. Nach ersten Ergebnissen<sup>1)</sup> liegt die Diffusionslänge der Ladungsträger in CdS bei etwa  $10 \mu$ ; man muß daher mindestens verlangen, daß die Lichtintensität auf eine Strecke  $\Delta x < 10 \mu$  auf den  $e$ -ten Teil abnimmt. Es wurden eine Reihe von Möglichkeiten zur Erzeugung von möglichst scharfen verschiebbaren Licht-Schatten-Grenzen ausführlich untersucht.

### a) Blende im Abstand $b$ über dem Kristall

Beleuchtet man den Kristall mit einem Lichtbündel des Öffnungswinkels  $\varphi$ , so ist der Halbschattenbereich  $\Delta x = 2b \operatorname{tg} \varphi/2$ . Für  $b = 0,1 \text{ mm}$  und  $\varphi = 10^\circ$  ergibt sich also  $\Delta x = 16 \mu$ . Außerdem wird ein Teil des Lichtes reflektiert und gelangt unter die Blende. Beträgt das Reflektionsvermögen der Blendenunterseite 0,7 %, und das des Kristalls 15 % (CdS im Grundgitter-absorptionsgebiet), so beträgt die Intensität des Streulichtes unter der Blende rund  $1/1000$  der Lichtintensität im belichteten Teil. Man kann mit einer solchen Anordnung den Verlauf von  $n(x_0)/n_0$  also nur bis zu  $n(x_0)/n_0 = 10^{-3}$  verfolgen. So waren die Verhältnisse bei den Messungen in<sup>1)</sup>.

### b) Optische Abbildung einer scharfen Kante

Um die Leistungsfähigkeit dieses Verfahrens abschätzen zu können, wurde mit einem vergüteten Tessar 1:3,5/50 das Bild einer Rasierklingenschneide im Maßstab 1:1 abgebildet und das Bild mit einem Zeiß-Spalt auf einem Mikroskopisch mit Mikrometerschraube direkt ausphotometriert. Es ergab sich, daß die Lichtintensität an der Licht-Schatten-Grenze auf einer Strecke von  $40 \mu$  auf etwa 2 % exponentiell abfällt und sich dann langsam einem konstanten Wert von 0,05 % nähert.

Da beide Verfahren unsere Anforderung nicht erfüllen konnten, wurde schließlich der folgende Weg gewählt.

### c) Direkt auf den Kristall aufgesetzte Blende

Zur Erzeugung einer möglichst scharfen Licht-Schatten-Grenze wurde hier eine scharfe Schneide (Rasierklinge) direkt auf den Kristall aufgesetzt (Abb. 2). Die Schneide befand sich an einer federnden Zunge  $\bar{B}$  und konnte mit einer Nocke  $E$  vom Kristall abgehoben werden. Der Kristall war mit seiner Halterung auf einem Zeiß-Mikroskopisch mit Mikrometer-schraube befestigt und konnte so bei abgehobener Schneide unter derselben verschoben werden. Um das Streulicht auf ein Minimum herabzudrücken, wurde in den Strahlengang ein Kreuzspalt gebracht, der mit einem Tessar 1:3,5/50 T auf den Kristall abgebildet wurde. Die Größe des beleuchteten Feldes konnte so genau dem Kristall angepaßt werden und vermieden werden, daß Licht neben den Kristall fiel. Kristallhalter und die unmittelbar auf den

Kristall aufgesetzte Blende befanden sich in einem innen geschwärzten Gehäuse, um Streulichteinfall von außen zu verhindern. In dieses Gehäuse konnte Heißluft geblasen werden; dies gestattete eine Variation der Meßtemperatur zwischen 20°C und 80°C.

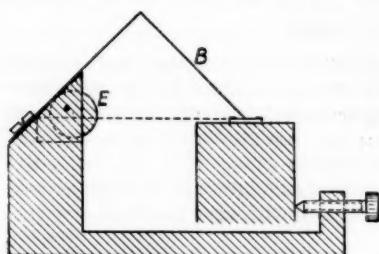


Abb. 2. Mechanismus zur Herstellung der verschiebbaren Licht-Schatten-Grenze auf der Kristalloberfläche

Strahlungsdiffusion im Kristall selbst eine scharfe Licht-Schatten-Grenze prinzipiell nicht erzielbar ist.

In Abb. 3 ist die gesamte Meßanordnung skizziert. Für die Messungen wurden nach dem Verfahren von Lorenz<sup>6)</sup> gezüchtete CdS-Kristalle mit glatter Oberfläche (Größe  $\approx 0,1 \times 0,5 \times 0,001$ –0,01 cm<sup>3</sup>) ausgesucht und nach dem bekannten Verfahren<sup>7)</sup> mit Gold- oder Aluminiumelektroden versehen.

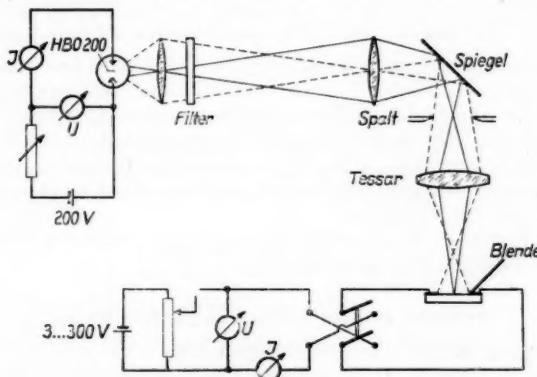


Abb. 3. Skizze der Meßanordnung

### 3. Meßergebnisse

Mit der oben beschriebenen Anordnung wurden Kurven  $R(x_0)$  für etwa 40 verschiedene teils nicht bewußt aktivierte, teils aktivierte Kristalle aus

<sup>6)</sup> R. Lorenz, Ber. dtsch. chem. Ges. **24**, 1501 (1891)

<sup>7)</sup> W. Buttler u. W. Muscheid, Ann. Physik **14**, 215 (1954).

<sup>8)</sup> W. Weizel u. J. Fassbender, Forschungsberichte des WVM Nordrhein-Westf. 104 (1954).

verschiedenen Laboratorien ermittelt. Im allgemeinen wurde der Strom  $I(x_0)$  bei einer fest vorgegebenen Spannung von 30 V gemessen. Abb. 4 und 5

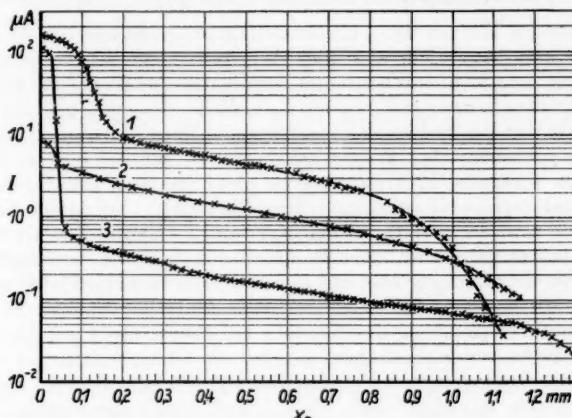


Abb. 4. Photostrom in Abhängigkeit von  $x_0$  bei 30 V Vorspannung. 1. Kristall 21:  $L_1 = 22 \mu$ ,  $L_2 = 430 \mu$ . 2. Kristall 9:  $L_1 = 9 \mu$ ,  $L_2 = 450 \mu$ . 3. Kristall 24:  $L_1 = 6 \mu$ ,  $L_2 = 600 \mu$ . Kristalldicke  $d \approx 100 \mu$

zeigen einige Beispiele für solche Kurven  $I(x_0)$ . Man sieht, daß sich diese Kurven, abgesehen von ihrem Anfangs- und Endstück, aus zwei exponentiellen Teilstücken  $I(x_0) \approx e^{-x_0/L_1}$  bzw.  $e^{-x_0/L_2}$  zusammensetzen. Da für Exponentialfunktionen Funktion und Ableitung einander proportional sind, braucht man nicht die Ableitung  $dR/dx_0$  zu bilden, sondern man kann unmittelbar folgern, daß auch  $n(x_0) \sim e^{-x_0/L_1}$  bzw.  $e^{-x_0/L_2}$  ist [für  $x_0 \gtrsim 5 L_1$  ist die 1 gegen  $(l/R_0)dR(x_0)/dx_0$  in Gl. (7) vernachlässigbar]. Für die meisten der 28 gemessenen nicht bewußt aktivierten Kristalle lag  $L_1$  zwischen 3 und 15  $\mu$ , nur vereinzelte Kristalle zeigten größere Diffusionslängen bis zu 38  $\mu$ . Es wurden teilweise für die beiden Enden eines Kristalls verschiedene Diffusionslängen gefunden, was auf Inhomogenitäten der inneren Struktur des Kristalls hindeutet. Die Diffusionslängen zwischen 3 und 5  $\mu$  wurden durchweg an nicht bewußt aktivierten Kristallen einer bestimmten Herkunft festgestellt; diese waren wesentlich dünner (Dicke  $\approx 10 \mu$ ) als die übrigen ( $\approx 100 \mu$ ). Wie man den Abbildungen entnimmt, variiert der Einsatzpunkt der zweiten Teilkurve von Kristall zu Kristall um Größenordnungen. Bei einem Teil der nicht bewußt aktivierten Kristalle (die mit  $L_1 \approx 3-5 \mu$ ) fehlt in dem von uns untersuchten Bereich die zweite Teilkurve ganz.  $L_2$  liegt bei den verschiedenen nicht bewußt aktivierten Kristallen zwischen 0,02 und 0,12 cm. Ag-aktivierte CdS-Kristalle ( $\approx 100 \mu$  dick) lieferten  $L_1$ -Werte um 27  $\mu$ .



Abb. 5. Photostrom in Abhängigkeit von  $x_0$ . Kristall 35:  $L_1 = 4 \mu$ ,  $d \approx 10 \mu$

Der Einsatzpunkt der zweiten Teilkurve lag bei diesen Kristallen relativ hoch.  $L_2$  lag zwischen 0,015 und 0,03 cm. Mn-aktivierte CdS-Kristalle ( $\approx 10 \mu$  dick) lieferten  $L_1$ -Werte zwischen 3 und 4  $\mu$ .

Wenn man die Kurven  $R(x_0)$  tatsächlich differenziert und den Ausdruck (7) bildet, so erhält man auch aus dem Anfangsteil der Kurve physikalische Aussagen. Es zeigt sich, daß häufig im Anfangsteil der Kurve bei noch relativ großen Elektronenkonzentrationen ein  $L_1$  auftritt, das etwa um den Faktor 2 größer ist als das bei kleinen Konzentrationen kurz vor dem Übergang zur 2. Teilkurve gemessene  $L_1$ . Weiter zeigt es sich, daß bei einigen Kristallen die elektrisch wirksame Elektrodengrenze nicht mit dem Rand der als Elektroden aufgedampften Metallspiegel übereinstimmt. In einem Fall schien die Elektrode etwa 60  $\mu$  weiter in den Kristall hineinzureichen als der aufgedampfte Metallspiegel. Diese Tatsache spricht für Fassbenders Auffassung<sup>9)</sup>, daß durch die Beglimmung eine gut leitende Oberflächenschicht im CdS erzeugt wird. In unserem Fall wird die Abdeckung des Spaltes bei der Beglimmung und Verspiegelung des Kristalls am Rande nicht gut genug an der Kristalloberfläche angelegen haben, so daß die Glimmtenladung ein Stück unter die Abdeckung gelangen konnte. Beim Endteil der Kurven  $I(x_0)$  nimmt  $I(x_0)$  stärker als mit  $e^{-x_0/L_2}$  ab. Das hängt damit zusammen, daß hier  $l - x_0$  nicht mehr groß gegen  $L_2$  ist;  $n(l, x_0) \approx n_0$  gilt aber nur für  $|l - x_0| > L_2$ .

Für  $(l - x_0) \rightarrow 0$  geht natürlich  $n(l, x_0) \rightarrow n_D$  ( $n_D$  ist die Elektronenkonzentration, die der Dunkelleitfähigkeit entspricht) und der Kristall erreicht den Dunkelwiderstand.

Bildet man die Ableitung  $dR/dx_0$  für die Umgebung des Einsatzpunktes der zweiten Teilkurve und berechnet man daraus den Verlauf von  $n(x_0)$ , so stellt man überraschenderweise fest, daß die Abnahme der Elektronenkonzentration mit wachsendem  $x_0$  nicht monoton zu sein scheint, sondern daß letztere ein Minimum durchläuft (Abb. 6). Dies erscheint völlig unverständlich und in Wirklichkeit nimmt die Elektronenkonzentration auch nicht wieder zu. Die Erklärung für dieses eigenartige Verhalten finden wir, wenn wir be-

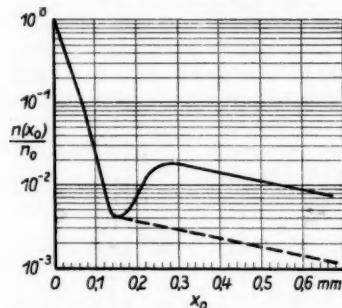


Abb. 6. Relative Elektronenkonzentration in Abhängigkeit von  $x_0$ , ausgewertet nach Formel (7). Kristall 21:  $L_1 = 22 \mu$ ,  $L_2 = 430 \mu$ ;  $d \approx 100 \mu$ ,  $\frac{d}{L_1} \approx 5$ ; Tiefe des Minimums  $T \approx 6$

rücksichtigen, daß unsere teilweise beleuchteten CdS-Kristalle eine endliche Dicke  $d > L_1$  haben. Die weiter vorn durchgeführte eindimensionale Behandlung des Problems war nur für hinreichend dünne Kristalle, d. h. für Kristalle mit  $d < L_1$ , zulässig. Im Bereich der ersten Teilkurve erfolgt der Stromtransport hauptsächlich in einer Oberflächenschicht der Dicke  $L_1$ . Im Bereich der zweiten Teilkurve tritt dagegen wegen  $L_2 > d$  der gesamte Kristallquerschnitt zum Stromtransport bei. Der scheinbaren Zunahme der

<sup>9)</sup> J. Fassbender, Z. Physik 145, 301 (1956); s. auch F. A. Kröger, G. Diemer, H. A. Klasens, Physic. Rev. 103, 279 (1956).

Ladungsträgerkonzentration entspricht in Wirklichkeit eine Verbreiterung des Querschnitts der leitenden Schicht. Um den wahren Konzentrationsverlauf zu erhalten, muß man also den zweiten, flacher abfallenden Teil der durch Differentiation erhaltenen Kurve um den Faktor  $L_1/d$  nach unten verschieben.

Um dies auch quantitativ einzusehen betrachten wir das folgende vereinfachte Modell für den Stromtransport im teilweise beleuchteten CdS-Kristall: Der Kristall sei wieder im Bereich  $(x_0, l)$  beleuchtet und im Bereich  $(0, x_0)$  dunkel. Der Transportmechanismus, der zu dem steileren Abfall mit  $e^{-x/L_1}$  führt, erzeugt an der Kristalloberfläche eine leitende Schicht der Dicke  $L_1$  mit der Elektronenkonzentration

$$n_1(x, x_0) = \begin{cases} n_0 & \text{für } x > x_0 \\ \frac{x_0 - x}{L_1} & \text{für } x < x_0 \\ n_0 e^{-x/L_1} & \end{cases}$$

Außerdem erzeugt der Mechanismus, der zu dem Konzentrationsabfall mit  $e^{-x/L_2}$  führt, eine über die ganze Kristalldicke  $d < L_2$  homogene Ladungsträgerkonzentration

$$n_2(x, x_0) = \begin{cases} n' & \text{für } x > x_0 \\ \frac{x_0 - x}{L_2} & \text{für } x < x_0 \\ n' e^{-x/L_2} & \end{cases}$$

Ist  $L_1 \ll d$ , so kann man die beiden Schichten als zwei parallel geschaltete Widerstände betrachten. Der Gesamtwiderstand  $R(x_0)$ , den wir messen, ergibt sich dann zu  $R(x_0) = 1/(R_1^{-1}(x_0) + R_2^{-1}(x_0))$  mit

$$R_1(x_0) = [(l - x_0) + L_1(e^{x_0/L_1} - 1)]/L_1 b e n_0 \mu_n$$

und

$$R_2(x_0) = [(l - x_0) + L_2(e^{x_0/L_2} - 1)]/d b e n' \mu_n,$$

( $b$  = Kristallbreite). Lassen wir den Anfangsteil der Kurve außer Betracht, so können wir in  $R_1$  den Term  $(l - x_0)$  vernachlässigen. Für  $(x_0/L_2)^2 \ll \text{Min}(2 l/L_2, 1)$  ist dann

$$R(x_0) = 1/\left[\left(e^{-x_0/L_1} + \frac{dn'}{ln_0}\right)b e n_0 \mu_n\right].$$

Für  $x_0$ -Werte, die den Bedingungen  $l/L_2 < (e^{x_0/L_2} - 1)$  (damit dieser Fall eintreten kann, muß  $l$  mindestens  $2 L_2$  betragen) und  $e^{x_0/L_1} > \frac{n_0 L_2}{n' d} e^{x_0/L_2}$  genügen, gilt dagegen näherungsweise

$$R(x_0) = n_0 L_2 e^{x_0/L_2} / (n' d b e n_0 \mu_n).$$

Für die Ableitung  $dR/dx_0$  gilt dann entsprechend

$$(dR/dx_0)^{-1} = L_1 b e n_0 \mu_n \left[ e^{-x_0/L_1} + \frac{2dn'}{ln_0} + \left(\frac{dn'}{ln_0}\right)^2 e^{x_0/L_1} \right] \quad (8)$$

für  $x_0 < L_2 \sqrt{\text{Min}\left(\frac{2l}{L_2}, 1\right)}$  und

$$(dR/dx_0)^{-1} = L_1 b e n_0 \mu_n \cdot n' d e^{-x_0/L_2} / n_0 L_1 \quad (9)$$

für

$$x_0 > \text{Max}\left[L_2 \ln\left(\frac{l}{L_2} + 1\right), \frac{L_1 L_2}{L_2 - L_1} \ln \frac{n_0 L_2}{n' d}\right].$$

Die beiden, den Gln. (8) und (9) entsprechenden Kurven sind in Abb. 7 eingetragen. Beide zusammen ergeben eine Kurve, die genau dieselbe Form wie unsere durch Differentiation aus den gemessenen  $R(x_0)$  erhaltenen Kurven (Abb. 6) hat.

Aus unserem vereinfachten Modell können wir entnehmen, daß das Minimum bei  $x_0 \approx L_1 \ln \frac{l n_0}{dn'}$  liegt und das es um so breiter ist, je größer  $L_2$  ist. Wäre  $L_1 \gtrsim d$ , so dürfte kein Minimum auftreten. Man muß also erwarten, daß dieses Minimum um so schwächer

ausgeprägt ist, je kleiner  $d$  im Verhältnis zu  $L_1$  ist. Daß dies tatsächlich der Fall ist, zeigt Abb. 8a. Hier ist  $dR/dx_0$  für zwei etwa  $10 \mu$  dicke Mn-aktivierte CdS-Kristalle aufgetragen.  $L_1$  ist für beide etwa  $3 \mu$  ( $d/L_1 = 3,3$ ); das Minimum hat eine Tiefe, die etwa dem Faktor 3 entspricht. Das Minimum ist in beiden Fällen verschieden breit, dies entspricht dem Unterschied in  $L_2$  (I:  $L_2 = 1000 \mu$ , II:  $L_2 = 500 \mu$ ). Bei dem Kristall der Abb. 6 dagegen ( $d \approx 100 \mu$ ,  $L_1 = 22 \mu$ ,  $\frac{d}{L_1} \approx 5$ ) entspricht die Tiefe des Minimums dem Faktor 6.  $L_2$  ist  $400 \mu$ . Ein weiteres Beispiel zeigt Abb. 8b. Wir sehen, daß das vereinfachte Modell qualitativ unsere Meßergebnisse gut erklärt. Ein quantitativer Vergleich erscheint uns wegen der zu großen Vereinfachung jedoch nicht als sinnvoll.

Bei einer ganzen Reihe von Kristallen zeigte sich bereits bei einer Spannung von 30 V eine Abhängigkeit der Kurve  $I(x_0)$  von der Stromrichtung (Abb. 9),

Abb. 7.  $R_0 / \frac{dR}{dx_0} \cdot l$  in dem vereinfachten Modell

bei einem Teil der Kristalle trat diese jedoch erst bei 300 V auf. Und zwar war für alle Kristalle mit  $L_1 \gtrsim 10 \mu$  der Strom  $I(x_0)$  größer, wenn der belichtete Teil des Kristalls am positiven Pol der Spannungsquelle lag (Abb. 9a). Das entgegengesetzte Verhalten zeigten die Kristalle mit  $L_1 \approx 3-4 \mu$  (Abb. 9b).

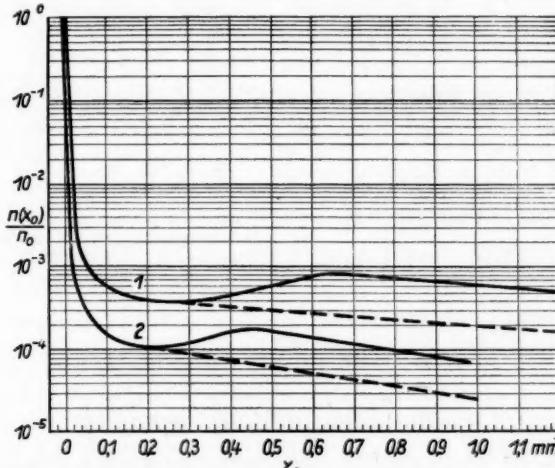


Abb. 8a. Relative Elektronenkonzentration in Abhängigkeit von  $x_0$ , ausgewertet nach Formel (7). 1. Mn-aktivierter Kristall 2:  $L_1 = 4 \mu$ ,  $L_2 = 1000 \mu$ ;  $d \approx 10 \mu$ ,  $\frac{d}{L_1} \approx 3$ ;

2. Mn-aktivierter Kristall 3:  $L_1 = 3 \mu$ ,  $L_2 = 500 \mu$ ;  $d \approx 10 \mu$ ,  $\frac{d}{L_1} \approx 3$ ;  $T \approx 3$

Bei der Temperaturänderung von 20° C auf 80° C zeigte sich durchweg eine Verringerung der Größe  $L_1$ .  $L_2$  änderte sich nur unwesentlich. Stark änderte sich dagegen der Ansatzpunkt des zweiten, flacher abfallenden Kurventeils. Er verschob sich nach kleineren  $I(x_0)$ -Werten hin (Abb. 10).

#### 4. Diskussion der Meßergebnisse

Für den ersten, steileren Abfall der Ladungsträgerkonzentration  $\sim e^{-x/L_1}$ , der bereits in<sup>1)</sup> beobachtet wurde ist offenbar eine Art „ambipolare“ Diffusion der Ladungsträger verantwortlich<sup>10-12)</sup>.

Eine strenge geschlossene Lösung des Differentialgleichungssystems, das die Ladungsträgerdiffusion beschreibt, ist zur Zeit nicht möglich. Vernachlässigt man jedoch die Raumladung, so fällt die Raumladungsgleichung weg und das restliche Gleichungssystem lässt sich (im Prinzip auch unter Berücksichtigung von verschiedenen Typen von Hafttermen) lösen<sup>11)</sup>. Eine andere Möglichkeit zur näherungsweisen Lösung des Gleichungssystems erhalten wir, wenn wir einen Ladungsträgertyp (beim CdS z. B. die Löcher) als unbeweglich annehmen<sup>13)</sup>. Einen Diffusionsprozeß, dem die erste Lösungsmethode mit Vernachlässigung der Raumladung adäquat ist, wollen wir hier als „ambipolar“ bezeichnen. Welche der beiden Näherungsmethoden angebrachter ist, hängt davon ab, wie groß  $L_p = \sqrt{D_p \tau_p}$  im Verhältnis zur Debye-Länge  $\sqrt{2\epsilon \epsilon_0 k T e^2/n}$  ist. Größere Diffusionslängen und einen exponentiellen Konzentrationsabfall liefert die Näherung mit unbeweglichen Löchern im allgemeinen nicht. In<sup>13)</sup> muß, um einen Konzentrationsverlauf  $\sim e^{-x/L}$  mit  $L = 1 \mu$  zu erklären, angenommen werden, daß die Anregungsintensität  $\sim e^{-x/L}$  ist. Diese Annahme in<sup>13)</sup> führt auf Absorptionskoeffizienten  $\mu = 10^4 \text{ cm}^{-1}$  für das Grundgittergebiet bei CdS. Diffusionslängen von 3-15  $\mu$ , wie sie in der vorliegenden Arbeit gefunden wurden, dürften sich auf diese Weise jedoch kaum erklären lassen.

Wir wollen daher unsere Meßergebnisse nach<sup>11)</sup> interpretieren. Nimmt man an, daß die Lebensdauer der Löcher  $\tau_p$  näherungsweise konzentrations-

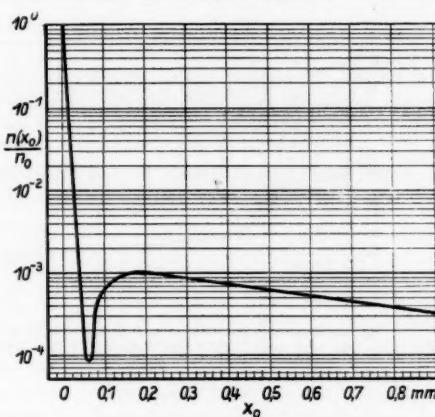


Abb. 8b. Relative Elektronenkonzentration in Abhängigkeit von  $x_0$ , ausgewertet nach Formel (7).-  
Kristall 24:  $L_1 = 6 \mu$ ,  $L_2 = 600 \mu$ ;  $d \approx 100 \mu$ ,  
 $\frac{d}{L_1} \approx 16$ ;  $T \approx 12$

<sup>10)</sup> G. Diemer and W. Hoogenstraaten, Phys. Chem. Solids **2**, 119 (1957).

<sup>11)</sup> J. Auth, Ann. Physik **20**, 210 (1957).

<sup>12)</sup> J. Broser, Phys. Verh. **8**, 167 (1957).

<sup>13)</sup> G. Ecker und J. Fassbender, Z. Physik **149**, 571 (1957).

unabhängig ist<sup>14)</sup>), so erhält man für die Anzahl der Rekombinationsakte pro Sekunde  $R_p = p/\tau_p$ . Andererseits erhält man für die Rekombination der Elektronen  $R_n = \beta n^2 + \alpha n$ . Im stationären Fall muß  $R_p = R_n$  sein. Folg-

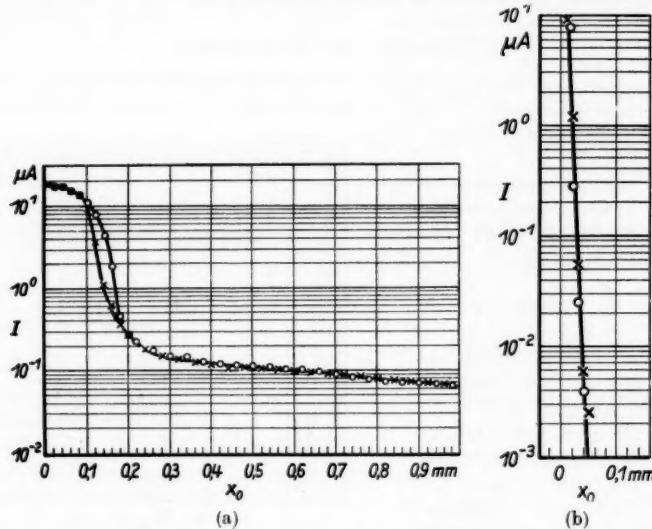


Abb. 9. Photostrom in Abhängigkeit von  $x_0$  bei 30 V Vorspannung für verschiedene Polungen. ○-belichtete Seite des Kristalls ist positiv, ×-belichtete Seite des Kristalls ist negativ. a) Kristall 1:  $L_1 = 10$  bzw.  $14 \mu$ ,  $d \approx 100 \mu$ , b) Kristall 35:  $L_1 = 4 \mu$ ,  $d \approx 10 \mu$ . (Die Kristalle 1 und 35 haben verschiedene Herkunft)

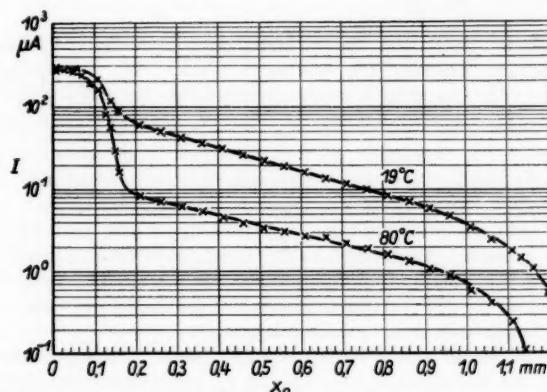


Abb. 10. Photostrom in Abhängigkeit von  $x_0$  bei 30 V Vorspannung für verschiedene Temperaturen am Kristall 28

<sup>14)</sup> Dies erscheint plausibel, da die Löcherhaftstellen offenbar in sehr großen Konzentrationen vorliegen.

pro  
der  
Folge

lich ist

$$n = \sqrt{p/\beta \tau_p} \quad \text{für} \quad n \gg \frac{\alpha}{\beta},$$

$$n = p/\alpha \tau_p \quad \text{für} \quad n \ll \frac{\alpha}{\beta}.$$

Nach<sup>11)</sup> ist also

$$L_1 \approx 2,4 \sqrt{D_p \tau_p} \quad \text{für} \quad n \gg \frac{\alpha}{\beta} \quad \text{und} \quad L_1 \approx 1,4 \sqrt{D_p \tau_p} \quad \text{für} \quad n \ll \frac{\alpha}{\beta}.$$

Dies erklärt, daß wir im Anfangsteil unserer Kurven ungefähr um den Faktor 2 größere  $L_1$ -Werte fanden.

Wir wollen hier noch den Einfluß eines von außen angelegten Feldes auf die Konzentrationsverteilung diskutieren. Dieses Feld gibt Anlaß zu einem elektrischen Strom  $j$  (pro  $\text{cm}^2$ ). Es beeinflußt die sich einstellende Konzentrationsverteilung in zweifacher Weise. Erstens zieht es die Löcher in seiner Richtung mit [das Glied mit  $j$  in Gl. (5) bei<sup>11)</sup>] und zweitens beeinflußt es die Raumladung, denn nach Gl. (1) ist

$$\varrho = \varepsilon \varepsilon_0 \operatorname{div} \mathfrak{E} = -[(j/e \mu_n n) (\operatorname{grad} n/n) + (kT/e) \operatorname{div} (\operatorname{grad} n/n)];$$

es versucht die beiden Ladungsträgerarten verschiedenen Vorzeichens zu trennen. Den ersten Einfluß erhält man natürlich nur, wenn man auch die Löcher als beweglich betrachtet. Im Fall des teilweise beleuchteten CdS-Kristalls beobachten wir, wenn der Einfluß des Feldes auf die Löcher den auf die Raumladung überwiegt, einen größeren Strom, wenn die Löcher vom Feld in Diffusionsrichtung gezogen werden, d. h. wenn der belichtete Teil des Kristalls positiv ist. Dies war bei unseren Messungen bei allen Kristallen mit Diffusionslängen  $L_1 \gtrsim 10 \mu$  der Fall, sofern überhaupt ein Einfluß der Feldrichtung beobachtbar war (Abb. 10a). Das gleiche Verhalten wurde in<sup>13)</sup> (dort Fig. 5) beobachtet. Ein entgegengesetztes Verhalten stellten wir bei den nicht bewußt aktivierten CdS-Kristallen mit  $L_1 \approx 3-5 \mu$  (Abb. 10b) fest. Hier überwiegt offenbar der Einfluß auf die Raumladung.

Nach unseren Messungen und den Untersuchungen anderer Autoren<sup>10) 12)</sup> variiert also die Diffusionslänge für die Löcher (die ja den ganzen „ambipolaren“ Diffusionsvorgang bestimmt) in nicht bewußt aktivierten CdS-Kristallen je nach Herkunft zwischen 1 und  $15 \mu$ . Auch die Messungen in<sup>13)</sup> lassen sich mit einer Diffusionslänge von  $1 \mu$  interpretieren. Nehmen wir an  $D_p \approx 5 \text{ cm}^2/\text{sec}$ , so erhalten wir für  $\tau_p$  Werte von  $10^{-9}$  bis  $10^{-7} \text{ sec}$ .

Wir wenden uns nun dem zweiten, flacheren Konzentrationsabfall  $\sim e^{-x/L_1}$  zu, der auf verschiedene Weisen gedeutet wurde<sup>15-17) 10) 12) 18) 19)</sup>. Wir wollen zunächst untersuchen, welche Folgerungen sich aus der Hypothese ergeben, daß für den zweiten, flacheren Konzentrationsabfall Excitonendiffusion die Ursache sei<sup>10) 16) 18)</sup>. Bestrahlt man einen Kristall der Dicke  $d$  mit  $Q$  Quanten pro  $\text{cm}^2 \text{ sec}$  im Grundgittergebiet und ist  $\alpha$  die Quantenausbeute für die

<sup>15)</sup> M. Balkanski, Diskussionsbeitrag zu M. Schön, J. Physique Radium **17**, 689 (1956).

<sup>16)</sup> M. Balkanski u. I. Broser, Internat. Koll. über Halbleiter und Phosphore, Garmisch 1956.

<sup>17)</sup> M. Balkanski u. I. Broser, Z. Elektrochem. **61**, 715 (1957).

<sup>18)</sup> M. Balkanski J. Physique Radium **19**, 170 (1958).

<sup>19)</sup> J. Auth u. R. Ridder, Z. Naturforschg. **13a**, 426 (1958).

Excitonenausbeute, so werden an der Kristalloberfläche  $\alpha Q$  Excitonen pro  $\text{cm}^2 \text{ sec}$  erzeugt. Diese diffundieren ins Kristallinnere und erzeugen dort eine homogene Excitonenkonzentration  $N$ , sofern die Diffusionslänge der Excitonen  $L_e \gg d$  ist. Die Anzahl der pro  $\text{cm}^3 \text{ sec}$  rekombinierenden Excitonen ist  $(1/\tau_{p,n} + 1/\tau_0) N$ .  $\tau_{p,n}$  ist die Lebensdauer des Excitons, die durch die Zerstörung des Excitons unter Bildung eines Elektronlochpaars bestimmt wird.  $\tau_0$  ist die Lebensdauer des Excitons, die durch die direkte Rekombination des Excitons unter Aussendung eines Lichtquants bestimmt wird. Da eine Excitonenlumineszenz beim CdS sich bisher nicht nachweisen ließ (s. <sup>20</sup><sup>21</sup>), muß man annehmen, daß  $\tau_0 \gg \tau_{p,n}$  ist. Wir können also schreiben

$$\alpha Q = dN (1/\tau_{p,n} + 1/\tau_0) \approx dN/\tau_{p,n}.$$

Außerdem werden an der Kristalloberfläche pro  $\text{cm}^2 \text{ sec}$   $(1 - \alpha) Q$  Leitfähigkeitelektronen erzeugt, und durch Diffusion bildet sich eine Schicht der Dicke  $L_1$  mit der Elektronenkonzentration  $n$

$$n L_1/\tau_n = (1 - \alpha) Q.$$

Außerdem entstehen aber bei der Zerstörung der Excitonen Elektronen der Konzentration  $n_e$  homogen in der ganzen Kristalldicke:

$$n_e/\tau_n = N/\tau_{p,n} = \alpha Q/d.$$

Für den Quotienten  $n_e/n$  erhalten wir dann

$$n_e/n = (L_1/d) \cdot \alpha/(1 - \alpha).$$

Dieser Quotient sollte für den Einsatzpunkt des zweiten, flacheren Konzentrationsabfalls maßgeblich sein. Da  $\alpha$  eine Grundgittereigenschaft ist und als quantenmechanische Übergangswahrscheinlichkeit kaum temperaturabhängig sein sollte, sollte also der Einsatzpunkt des flacheren Konzentrationsabfalls von Kristall zu Kristall und bei Änderung der Temperatur nur so stark variieren, wie  $L_1/d$ <sup>22</sup>). Für  $L_2$  gilt bei dieser Interpretation

$$L_2 = \sqrt{D_{ex} \cdot \tau_{p,n}} = L_e.$$

Für diese Größe sollte man eher starke Variationen von Kristall zu Kristall (Zerstörung der Excitonen durch Zusammenstoß mit Verunreinigungen) oder eine deutliche Temperaturabhängigkeit (Zerstörung der Excitonen durch Zusammenstoß mit Schallquanten) erwarten. Das Experiment zeigte jedoch den entgegengesetzten Befund. Der Einsatzpunkt variiert von Kristall zu

<sup>20</sup>) R. Seiwert, Z. physic. Chem. **207**, 141 (1957).

<sup>21</sup>) G. Diemer, G. J. van Gurp, H. J. G. Meyer, Physica **23**, 987 (1957).

<sup>22</sup>) Laschkarew u. a. kommen auf Grund von kombinierten Messungen der Photoleitfähigkeit, der Lebensdauer und der Beweglichkeit der Träger in Abhängigkeit von der Wellenlänge (W. E. Laschkarew, E. A. Salkow, G. A. Feodorus und M. K. Scheinkman, DAN **114**, 1203 (1957)) zu dem Schluß, daß im CdS Excitonen beim Anregungsprozeß eine bedeutende Rolle spielen und hauptsächlich an Oberflächen-Rekombinationszentren direkt (ohne vorherige Bildung eines Elektron-Lochpaars) rekombinieren. Wenn dies richtig ist, läßt sich die starke Variation des Einsatzpunktes der zweiten Teilkurve von Kristall zu Kristall auch im Rahmen der Excitonendiffusionhypothese verstehen. Laschkarew kommt jedoch zu dieser Annahme auf Grund von Überlegungen, die eine Diffusionslänge der Größenordnung  $500 \mu$  für die Excitonen ausschließen. Daher kann der zweite, flachere Abfall, auch wenn Laschkarews Überlegungen richtig sind, nicht als Excitonendiffusion gedeutet werden.

Kristall um Größenordnungen (viel stärker als  $L_1/d$ ) und ist stark temperaturabhängig.  $L_2$  dagegen ist so gut wie temperaturunabhängig und variiert von Kristall zu Kristall schwächer. Wir halten daher für wahrscheinlicher, daß im wesentlichen Reabsorption von Lumineszenzlicht Ursache des zweiten, flacheren Konzentrationsabfalls ist<sup>12) 19)</sup>. Hier wird der Einsatzpunkt durch den Ausdruck

$$\int_{5200\text{ Å}}^{\infty} J(\lambda) E(\lambda) d\lambda$$

bestimmt ( $J(\lambda)$  ist die Lumineszenzintensität,  $E(\lambda)$  ist die Photoempfindlichkeit<sup>23)</sup> in Abhängigkeit von der Wellenlänge). Beide hierin auftretenden Funktionen sind keine Grundgittereigenschaften und sind temperaturabhängig.  $L_2$  entspricht bei dieser Interpretation etwa der reziproken Absorptionskonstanten für das wirksame Licht. Es ergeben sich Werte von  $9-45\text{ cm}^{-1}$  für nicht bewußt aktiviertes CdS und  $33-67\text{ cm}^{-1}$  für Ag-aktivierte Kristalle. Um diese Interpretation zu prüfen, wurde die Photoleitfähigkeit von CdS-Kristallen im Lumineszenzlicht eines CdS-Kristalls untersucht. Dazu wurde ein relativ großer CdS-Kristall vor einer Blende mit Licht der Wellenlänge  $436\text{ m}\mu$  bestrahlt. Hinter der Blende befand sich ein zweiter mit zwei Elektroden versehener CdS-Kristall, der nur von dem Lumineszenzlicht des ersten Kristalls erreicht werden konnte (Abb. 11). Durch Anblasen mit Heißluft konnte die Temperatur beider Kristalle zwischen  $20^\circ$  und  $70^\circ\text{C}$  variiert werden. Es zeigte sich, daß durch das Lumineszenzlicht bei Zimmertemperatur eine deutliche Photoleitfähigkeit erzeugt wurde, die bei Temperaturerhöhung abnahm. Die folgende Tabelle gibt den Quotienten der Photoströme bei  $20^\circ$  und  $70^\circ\text{C}$  an (Spalte 1). Spalte 2 gibt zum Vergleich den Faktor an, um den sich die zweite Teilkurve  $I(x_0)$  bei Temperaturerhöhung auf  $70^\circ$  zu kleineren  $I$ -Werten verschob:

Tabelle 1

Kristall Nr.	Quotient der Lumineszenz- photoströme $I_{20^\circ\text{C}}/I_{70^\circ\text{C}}$	Quotient der Photoströme für die zweite Teilkurve $I(x_0)_{20^\circ\text{C}}/I(x_0)_{70^\circ\text{C}}$
1	4,5	6
4	4	4,7
10	7	4
20	3,3	3,7
25	9	8
28	4,3	5

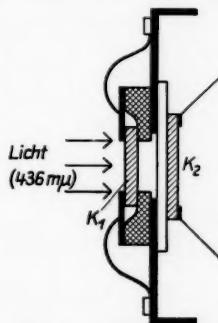


Abb. 11. Anordnung zur Messung der Photoleitfähigkeit durch Lumineszenzlicht.  $K_1$  = lumineszierender Kristall;  $K_2$  = CdS-Photozelle

Beim Vergleich dieser beiden Spalten muß man jedoch berücksichtigen, daß die beiden Anordnungen nicht völlig gleichwertig sind. Bei der zuletzt beschriebenen Anordnung entstehen Lumineszenz und Photoleitfähigkeit in zwei verschiedenen Kristallen. Außerdem ist die Intensität des Lumineszenz-

<sup>23)</sup> Unter Photoempfindlichkeit wollen wir hier die Photoleitfähigkeit pro Intensitäts-einheit verstehen.

lichtes im zweiten Kristall sehr viel geringer, als die Lumineszenzintensität im dunklen Teil eines teilweise beleuchteten CdS-Kristalls, da nur ein geringer Bruchteil des Lumineszenzlichtes wegen Totalreflektion den ersten Kristall verläßt; außerdem ist die Intensität in Richtung senkrecht zur Kristalloberfläche kleiner, weil die strahlende Schicht verhältnismäßig dünn ist. Beim teilweise beleuchteten CdS-Kristall wirkt dagegen der Kristall wie ein Lichtleiter, der das Lumineszenzlicht aus dem beleuchteten Teil in den dunklen leitet. Aus diesem Grunde waren die Photoströme bei der zuletzt beschriebenen Anordnung der schwächeren Anregung entsprechend viel kleiner als bei der Messung mit teilweise beleuchteten CdS-Kristallen. Bei dieser geringen Anregungsintensität spielten bereits langzeitige An- und Abklingprozesse eine Rolle, die die Messungen sehr erschweren.

Wir danken Herrn Dr. E. A. Niekisch für viele wertvolle Hinweise und fruchtbare Diskussionen.

Berlin, II. Physikalisches Institut der Humboldt-Universität.

Bei der Redaktion eingegangen am 26. Juni 1958.

## Einige Ergebnisse über laufende Schichten in Neon-Glimmentladungen

Von Herbert Achterberg und Johannes Michel

Mit 14 Abbildungen

### Inhaltsübersicht

Es wird untersucht, in welcher Weise äußere Bedingungen auf die Eigenschaften von laufenden Schichten in Neon wirken. Geeignete Maßnahmen zur Vermeidung dieses Einflusses werden angegeben, und durch Erzeugung von künstlichen laufenden Schichten mit Hilfe von Sinusspannungen ist es dann möglich, die Eigenschaften der laufenden Schichten ohne äußere Beeinflussung zu messen.

### Einleitung

Schon lange ist bekannt, daß die positive Säule einer Edelgasglimmentladung nicht homogen zu sein braucht, sondern von schnell wandernden Helligkeitsschwankungen, den sogenannten laufenden Schichten, durchzogen wird. Die erste systematische Untersuchung dürfte von Pupp stammen, der den Bereich großer Ströme untersuchte<sup>1)2)3)</sup>. Durch die Arbeiten verschiedener Autoren wurde vor allem in den letzten Jahren gezeigt, daß es sich bei den laufenden Schichten um eine sehr häufig auftretende Erscheinung handelt<sup>4)5)6)7)</sup>. Während diese Untersuchungen nur an selbsterregten laufenden Schichten durchgeführt wurden, erzeugte Pekárek in der sonst homogenen Säule durch von außen angelegte Impulse künstlich laufende Schichten<sup>8)9)</sup>. Dabei stellte sich heraus, daß für die Selbsterregung von laufenden Schichten eine Rückkopplung notwendig ist.

In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, daß bei Neon in dem untersuchten Strom- und Druckbereich die Rückkopplung durch äußere Bedingungen, wie Rohrlänge und äußeren Stromkreis bestimmt wird. Diese Randbedingungen beeinflussen aber die laufenden Schichten in gewisser Weise. Es dürfte daher interessant sein, diesen Einfluß zu trennen von den Eigenschaften der laufenden Schichten, die allein durch das Plasma bestimmt werden. Im fol-

<sup>1)</sup> W. Pupp, Physik. Z. **33**, 844 (1932).

<sup>2)</sup> W. Pupp, Z. techn. Physik **7**, 257 (1934).

<sup>3)</sup> W. Pupp, Physik. Z. **36**, 61 (1935).

<sup>4)</sup> T. Donahue, G. H. Dieke, Physic. Rev. (2) **81**, 248 (1951).

<sup>5)</sup> A. B. Stewart, J. opt. Soc. Amer. **45**, 651 (1953).

<sup>6)</sup> A. B. Stewart, J. appl. Physik **27**, 911 (1956).

<sup>7)</sup> G. Francis, Handbuch der Physik Band **22**, 140 (1956).

<sup>8)</sup> L. Pekárek, Czech. J. Physik **4**, 221 (1954).

<sup>9)</sup> L. Pekárek, Czech. J. Physik **7**, 533 (1957).

genden werden Möglichkeiten angegeben, die Rückkopplung zu unterdrücken, und in der Fremderregung mit Sinusspannungen wird eine Methode gefunden, die es gestattet, die Eigenschaften der laufenden Schichten in einem Plasma, das durch äußere Bedingungen nicht beeinflußt wird, meßtechnisch leicht zu untersuchen. Andererseits können die durch Sinusspannungen künstlich erregten laufenden Schichten dazu benutzt werden, den Einfluß der äußeren Bedingungen auf die Rückkopplung aufzuklären.

## Selbsterregte und fremderregte laufende Schichten

In Edelgasentladungen können laufende Schichten in weiten Strom- und Druckbereichen beobachtet werden. Während Pupp eine obere Stromgrenze für das Auftreten von laufenden Schichten festgestellt hat<sup>1)</sup>, gibt es auch für niedrige Ströme Bereiche, in denen die positive Säule homogen ist. In Abb. 1 sind die Verhältnisse für Neon bei kleinen Strömen dargestellt.

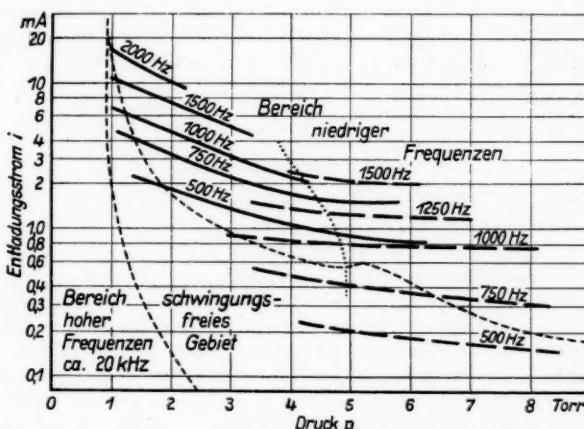


Abb. 1. Das Auftreten der laufenden Schichten in Neon-Glimmentladungen. Die dünn gestrichelte Linie gibt etwa die Lage der Grenze zwischen den Bereichen der selbst-erregten Schichten und der homogenen Säule an. Punkte gleicher Resonanzfrequenz  $f_0$  sind durch starke Linien verbunden. Diese Frequenz stimmt etwa mit der Frequenz der selbsterregten laufenden Schichten überein

Es sind deutlich zwei Frequenzbereiche zu erkennen, einer bei niedrigen Drucken mit hohen Frequenzen (etwa 20 kHz) und einer bei höheren Drucken mit niedrigen Frequenzen (etwa 300–3000 Hz). Diese beiden Bereiche sind für kleine Ströme im allgemeinen durch ein Gebiet getrennt, in dem keine laufenden Schichten auftreten. Die Grenzen dieses Gebietes hängen von verschiedenen Bedingungen ab, wie später noch ausführlich gezeigt wird. Die folgenden Untersuchungen dieser Arbeit beziehen sich auf den Bereich der tiefen Frequenzen.

In den älteren Arbeiten wurden die laufenden Schichten mit Drehspiegeln untersucht, während später meist elektronische Anordnungen mit Photozellen und Oszillographen verwendet wurden. Die positive Säule wird mit

einer Linse auf einen Spalt, hinter dem eine Photozelle steht, abgebildet, und damit kann nach entsprechender Verstärkung die Helligkeit einer schmalen Zone der Gasentladung untersucht werden. Die Kurvenform und die Amplitude der Helligkeitsschwankungen können auf diese Weise auf dem Schirm eines Oszillographen ausgemessen werden. Der Schichtabstand kann so z. B. durch die Phasenverschiebung der Spannungen zweier Photozellen bestimmt werden. Verschiebt man eine Photozelle so weit, daß sich die Phase um  $2\pi$  ändert, so entspricht die Verschiebung gerade einem Schichtabstand.

Die Untersuchungen der laufenden Schichten in Edelgasen haben gezeigt, daß diese sich in Richtung von der Anode zur Kathode bewegen. Auch im Gebiet der homogenen Säule können durch äußere Störungen laufende Schichten künstlich erzeugt werden. Eine Möglichkeit ist die Anregung mit Hilfe von kurzzeitigen Impulsen<sup>c)</sup>. Besonders einfach ist es z. B., die homogene Säule durch Spannungsimpulse zu stören, die zwischen Kathode und einer Außenelektrode angelegt werden. Diese Elektrode kann aus einem schmalen Metallstreifen bestehen, der außen um die Rohrwandung gelegt wird. Durch die Störung wird in Kathodennähe eine Schichtwelle ausgelöst, die vom kathodenseitigen Ende der positiven Säule in Richtung Anode läuft. Diese Schichtwelle besteht aus laufenden Schichten, die sich vom anodenseitigen Kopf der Störung in Richtung zur Kathode hin ausbreiten (Abb. 2). Sie kann als eine Wellengruppe von laufenden Schichten aufgefaßt werden. Die Schichten bewegen sich mit der Phasengeschwindigkeit  $u$  zur Kathode hin, während die Wellengruppe mit der Gruppengeschwindigkeit  $u^*$  zur Anode wandert.

Statt die homogene Säule durch Impulse zu stören, wird hier häufig zur Anregung eine Sinusspannung verwendet. Es entstehen dann künstliche laufende Schichten, deren Frequenz man durch die Erregerfrequenz wählen kann, deren Verhalten im übrigen aber dem der selbsterregten Schichten entspricht.

### Verstärkung und Rückkopplung

Die laufenden Schichten können als Wellen aufgefaßt werden, die folgendermaßen allgemein dargestellt werden können:

$$A = A_0 \cdot e^{\gamma z} \cdot e^{j\omega(t - \frac{z}{u})} \quad (1)$$

$A_0$  = Anfangsamplitude,

$\gamma$  = Verstärkungs- bzw. Dämpfungsfaktor,

$z$  = Koordinate in Richtung der Rohrachse,

$\omega = 2\pi f$  = Kreisfrequenz,

$\lambda$  = Schichtabstand = Wellenlänge,

$u$  = Phasengeschwindigkeit mit

$$u = \lambda \cdot f. \quad (2)$$

Der ortsabhängige Anteil der Verstärkung dieser Welle wird wie üblich definiert als

$$\mathfrak{B} = \frac{A}{A_0} e^{-j\omega t} = e^{\gamma z} \cdot e^{-j\omega \frac{z}{u}}. \quad (3)$$

Der erste Faktor gibt die örtliche Verstärkung bzw. Dämpfung der Amplitude an, während im zweiten Faktor die Phasenabhängigkeit zum Ausdruck kommt. Die Größe  $v = e^\gamma$  bedeutet die Verstärkung pro Längeneinheit im

Plasma und ist neben den Eigenschaften des Plasmas von der erregenden Frequenz  $f$  abhängig. Der Faktor der Phasenabhängigkeit kann noch durch Gl. (2) umgeformt werden, so daß man erhält:

$$\mathfrak{B} = [v(f)]^2 \cdot e^{-\frac{2\pi j}{\lambda(\sigma)} \frac{s}{\sigma}}. \quad (4)$$

Von den Eigenschaften der laufenden Schichten ist der Messung am einfachsten die Lichtintensität zugänglich. Die charakteristischen Größen der Welle, wie z. B. Frequenz, Wellenlänge, Verstärkung usw., werden im allgemeinen also aus Helligkeitsmessungen ermittelt.

Die Wellen der laufenden Schichten rufen an der Entladungsrohre eine Spannungsschwankung hervor; dabei sind die Helligkeitsschwankungen an der Anode annähernd den Spannungsschwankungen proportional. Eine

Wellengruppe, die durch das Plasma läuft, verursacht also erst bei ihrer Ankunft an der Anode Spannungsschwankungen (Abb. 2). Die Spannungsschwankungen lösen in Kathodennähe eine neue Störung aus; diese ist die Ursache für eine weitere Wellengruppe, die zur Anode wandert. Dieser Vorgang kann als Rückkopplung aufgefaßt werden<sup>4)</sup>. Innerhalb einer Wellengruppe kann die Amplitude der laufenden Schichten bei Annäherung an die Anode größer werden, d. h. die Amplitude der laufenden Schichten kann in Richtung zur Anode verstärkt werden. Wenn die Verstärkung innerhalb der Röhre so groß ist, daß die durch die Spannungsschwankungen der ersten Wellengruppe hervorgerufene zweite Wellengruppe eine größere Amplitude besitzt als die erste, so tritt durch Wiederholung dieses Vorganges Selbsterregung ein. Die Amplitude

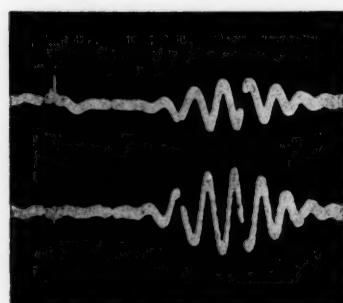


Abb. 2. Verlauf der Spannung am Rohr (oben) und der Helligkeit kurz vor der Anode (unten) einer durch einen Impuls hervorgerufenen Wellengruppe. Der auslösende Impuls ist deutlich links zu sehen. (Neon, 1,4 Torr, 2,2 mA, Abstand der Zeitmarken 4,4 ms, Elektrodenabstand 100 cm)

der laufenden Schichten kann selbstverständlich nicht beliebig weit wachsen, sondern wird durch nichtlineare Effekte begrenzt. Die Verhältnisse sind also ähnlich wie etwa bei einem rückgekoppelten elektronischen Verstärker, und man kann auch hier eine der Barkhausenformel

$$\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} = 1 \quad (5)$$

entsprechenden Formel anwenden.

$\mathfrak{B}$  ist dann die Gesamtverstärkung der laufenden Schichten im ganzen Rohr. Bei kleinen Amplituden erfolgt die Verstärkung  $\mathfrak{B}$  entsprechend Formel (4), während für große Amplituden wegen Unlinearitäten ein Sättigungseffekt auftritt (s. Abb. 10). Dadurch ist es überhaupt erst möglich, daß stabile selbsterregte Schwingungen entstehen. Der Rückkopplungsfaktor  $\mathfrak{A}$  enthält drei Anteile, erstens den Übertragungsfaktor  $\mathfrak{u}_a$ , der für die Umrechnung von Helligkeitsschwankungen an der Anode in Spannungsschwankungen maßgeblich ist, zweitens einen entsprechenden Faktor  $\mathfrak{u}_e$ , mit dem die rückgekoppelte Spannung in Helligkeitsschwankungen umgewandelt werden kann und

drittens ein Glied, das vom äußeren Kreise abhängt. Ein einfaches Wechselstrom-Ersatzschaltbild, das die Meßergebnisse in befriedigender Weise zu interpretieren vermag, ist das folgende:

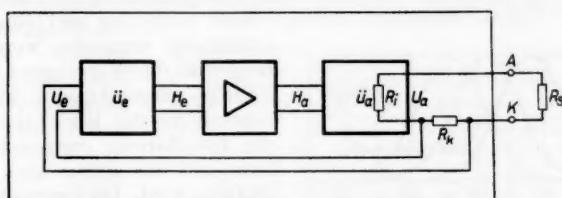


Abb. 3. Ersatzschaltbild für den Rückkopplungsvorgang bei laufenden Schichten

Der Verstärker wird vom Plasma der Glimmentladung dargestellt, das ja die Eigenschaft hat, laufende Schichten in Richtung zur Anode verstärken zu können. Eine laufende Schicht, deren Helligkeitsschwankung  $H_a$  an der Anode beobachtet werden kann, wird von einer entsprechenden Spannungsschwankung  $U_a$  begleitet, die an den Widerständen  $R_s$  und  $R_k$  abfällt, wobei  $R_s$  den Wechselstromwiderstand der äußeren Schaltung parallel zur Röhre darstellt. Der zwischen Anode  $A$  und Kathode  $K$  liegende Widerstand  $R_s$  wird im allgemeinen gleich dem Ohm'schen Vorschaltwiderstand der Entladungsröhre sein. Für die Rückkopplung ist der Bruchteil  $U_e$  der Spannung  $U_a$  maßgebend, der an  $R_k$  abfällt. Der fiktive Rückkopplungswiderstand  $R_k$  ist in der Gasentladung zu suchen. Die Spannung  $U_e$  verursacht im Kathoden-gebiet eine Störung, die als Helligkeitsschwankung  $H_e$  beobachtet werden kann. Damit ist der Rückkopplungskreis geschlossen. Eine solche Stromrückkopplung liegt vor, da sich die Rückkopplung mit abnehmendem Außenwiderstand  $R_s$  vergrößert, wie später noch genauer gezeigt wird. Der Widerstand  $R_k$  und der Innenwiderstand  $R_i$  des Verstärkers können wahrscheinlich in erster Näherung als Ohm'sche Widerstände angesehen werden.

Aus dem Vorhergegangenen ergibt sich, daß für das Auftreten von selbst-erregten laufenden Schichten bestimmte Amplituden- und Phasenbedingungen erfüllt sein müssen. Die Amplitudenbedingung sagt aus, daß der Absolut-betrag  $V$  der Gesamtverstärkung  $\mathfrak{V}$  im Rohr eine bestimmte Mindestgröße besitzen muß. Die Verstärkung kann untersucht werden, indem die Amplitu-de von laufenden Schichten entlang des Rohres gemessen wird. Dabei zeigt sich, daß in einem gewissen Bereich die Verstärkung  $v$  pro Längeneinheit konstant ist, die Amplitude also entsprechend Gl. (4) exponentiell wächst. Bei größeren Amplituden kann die Verstärkung  $v$  allerdings bis zum Wert 1 (Sättigung) abnehmen. Trägt man die Amplitude der laufenden Schichten in halblogarithmischer Darstellung in Abhängigkeit vom Abstand von der Kathode auf, so ergeben sich im ungesättigten Bereich Geraden, aus deren Neigung die Verstärkung  $v$  leicht ermittelt werden kann (s. Abb. 10).

Die Verstärkung zeigt eine deutliche Frequenzabhängigkeit. Zur Ermittlung der Frequenzabhängigkeit der Verstärkung erregt man mit einer sinusförmigen Spannung an einer Außenelektrode künstlich laufende Schichten. Variiert man bei gleichbleibender Amplitude die Frequenz der Erreger-

spannung und nimmt in einem bestimmten Abstand von der Kathode die Amplitude der Helligkeitsschwankungen mit der Photozelle auf, so hat ihre Frequenzabhängigkeit die Form einer Resonanzkurve (Abb. 4). Daraus läßt sich sofort die Frequenzabhängigkeit der Verstärkung  $v(f)$  pro Längeneinheit errechnen. Selbstverständlich müssen dabei Sättigung und Rückkopplung vollständig vermieden werden. Sättigung wird durch genügend kleine Amplituden ausgeschlossen, während zur Vermeidung der Rückkopplung z. B. ein Kapillarrohr verwendet werden kann, auf das später noch näher eingegangen wird. Die Frequenz der maximalen Verstärkung, die Resonanzfrequenz  $f_0$ , nimmt in dem von uns untersuchten Bereich mit der Entladungsstromstärke zu.

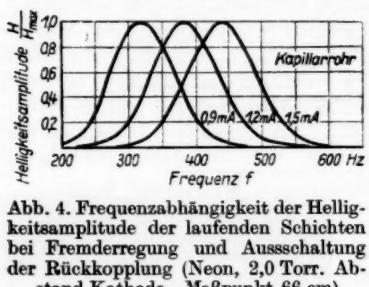


Abb. 4. Frequenzabhängigkeit der Helligkeitsamplitude der laufenden Schichten bei Fremderregung und Ausschaltung der Rückkopplung (Neon, 2,0 Torr. Abstand Kathode-Meßpunkt 66 cm)

Rückkopplung unerlässlich. Die Frequenz dieser selbsterregten Schichten wird dann in der Nähe der oben ermittelten maximalen Verstärkung zu suchen sein. Die genaue Frequenz, die sich erregt, wird nämlich durch die Phasenbedingung bestimmt. Anschaulich sagt die Phasenbeziehung in Formel (5) nichts anderes aus, als daß rückgekoppelte und im Rohr vorhandene Wellen

die Phasenverschiebung Null besitzen müssen. Dazu muß die Wellenlänge  $\lambda$  einen bestimmten Wert annehmen. Frequenz und Wellenlänge stehen aber miteinander durch eine Beziehung in Verbindung, auf die später noch genauer eingegangen wird.

Diese Vorstellung erklärt unter anderem die Frequenzsprünge, die in den Strom-Frequenz-Charakteristiken auftreten (Abb. 5). Bei jedem Sprung ändert sich die Phase der Verstärkung im Rohr um  $2\pi$ , d. h. die Zahl der laufenden Schichten ändert sich gerade um 1. Die Frequenz bleibt in den einzelnen „Niveaus“ wegen der Phasenbeziehung annähernd konstant, während sich die Frequenz der maximalen Verstärkung kontinuierlich mit der Stromstärke ändert.

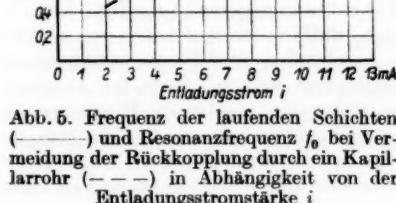


Abb. 5. Frequenz der laufenden Schichten (—) und Resonanzfrequenz  $f_0$  bei Vermeidung der Rückkopplung durch ein Kapillarrohr (---) in Abhängigkeit von der Entladungsstromstärke  $i$

zellen „Niveaus“ wegen der Phasenbeziehung annähernd konstant, während sich die Frequenz der maximalen Verstärkung kontinuierlich mit der Stromstärke ändert.

Noch deutlicher wird der Einfluß der Phasenbeziehung bei folgendem Versuch: In einem Rohr mit verschiebbarer Anode wird die Frequenz der selbsterregten Schichten bei konstantem Entladungsstrom in Abhängigkeit vom Kathoden-Anoden-Abstand gemessen (Abb. 6). Dabei ergibt sich, daß die Frequenz mit zunehmendem Kathoden-Anoden-Abstand ansteigt, aber jeweils nach einer Verschiebung von einer Wellenlänge sprunghaft kleiner

wird. Die Frequenzen der Schichten sind bei verschiedenen Rohrlängen, die sich gerade um ein ganzzahliges Vielfaches einer Schichtwellenlänge unterscheiden, annähernd gleich. Bei einer Änderung des Kathoden-Anoden-Abstandes muß sich nämlich wegen der Phasenbeziehung eine passende Wellenlänge und damit andere Frequenz einstellen. Selbstverständlich kann für eine bestimmte Rohrlänge die richtige Phasenbeziehung für mehrere Wellenlängen und damit verschiedene Frequenzen erfüllt werden; für die selbst-erregte Welle kommt nur die Frequenz mit der maximalen Verstärkung in Frage. An den Sprungstellen ist die Phasenbeziehung für beide Frequenzen erfüllt und die Verstärkung annähernd gleich groß.

Der Einfluß der Phase zeigt sich auch in folgendem Versuch recht gut. Nimmt man ähnlich wie bei der Frequenzabhängigkeit der Verstärkung die Amplitude der künstlich erregten laufenden Schichten auf, wobei die Rückkopplung so gewählt werden muß, daß gerade noch keine Selbsterregung auftritt, so macht sich bei diesen Resonanzkurven der Einfluß der Phasenbedingung deutlich bemerkbar. Während die Kurven ohne oder mit sehr geringer Rückkopplung glatten Resonanzkurven entsprechen (s. Abb. 4), ergeben sich bei stärkerer Rückkopplung eingesattelte Kurven (Abb. 7). Die Einsattlungen liegen gerade bei solchen Frequenzen, bei denen eine Gegenkopplung auftritt, also die Amplitude der erregten Welle durch die Rückkopplung geschwächt wird. Bei Mitkopplung dagegen zeigt die Kurve ein deutliches Maximum. Mit zunehmendem Kathoden-Anoden-Abstand verschieben sich diese Maxima zu höheren Frequenzen. Die Höhe eines solchen Maximums wird dabei durch die Frequenzabhängigkeit der Verstärkung bestimmt. Offensichtlich wird nämlich bei einer Vergrößerung des Kathoden-Anoden-Abstandes Mitkopplung für eine etwas vergrößerte Wellenlänge eintreten und sich das Maximum zu der dieser Wellenlänge entsprechenden Frequenz verschieben. Für größere Wellenlängen stellen sich in dem untersuchten Gebiet immer höhere Frequenzen ein (s. Abb. 8).

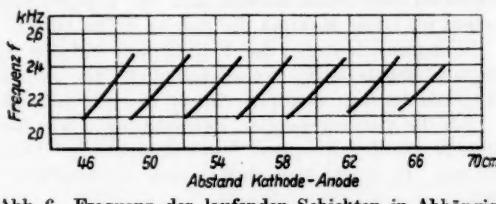


Abb. 6. Frequenz der laufenden Schichten in Abhängigkeit vom Kathoden-Anoden-Abstand (Neon, 1,4 Torr, 18 mA)

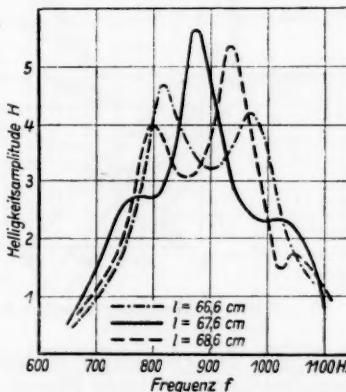


Abb. 7. Durch Rückkopplung beeinflußte Resonanzkurven bei verschiedenen Rohrlängen (Neon, 1,4 Torr, 5 mA)

eines solchen Maximums wird dabei durch die Frequenzabhängigkeit der Verstärkung bestimmt. Offensichtlich wird nämlich bei einer Vergrößerung des Kathoden-Anoden-Abstandes Mitkopplung für eine etwas vergrößerte Wellenlänge eintreten und sich das Maximum zu der dieser Wellenlänge entsprechenden Frequenz verschieben. Für größere Wellenlängen stellen sich in dem untersuchten Gebiet immer höhere Frequenzen ein (s. Abb. 8).

Diese Ergebnisse zeigen nochmals sehr deutlich, warum bei der Rohrlängenänderung Frequenzsprünge auftreten. Der Lage des größten Maximums in der Resonanzkurve für künstliche Erregung entspricht im allgemeinen die Frequenz der laufenden Schichten bei Selbsterregung. Ebenso wie sich die Maxima verschieben, wird sich also auch die Frequenz der selbsterregten laufenden Schichten ändern und ein Frequenzsprung wird etwa dort auftreten, wo beide Maxima die gleiche Höhe haben.

Sehr ähnlich liegen die Verhältnisse bei den Sprüngen in der Strom-Frequenz-Charakteristik, wobei lediglich die Frequenzänderung nicht durch Längenänderung, sondern durch die Stromänderung hervorgerufen wird.

Für die vorhergehenden Betrachtungen war die Abhängigkeit der Wellenlänge  $\lambda$  von der Frequenz  $f$  von Bedeutung. Diese wurde experimentell gewonnen. Es zeigte sich, daß in dem untersuchten Bereich die Wellenlänge  $\lambda$

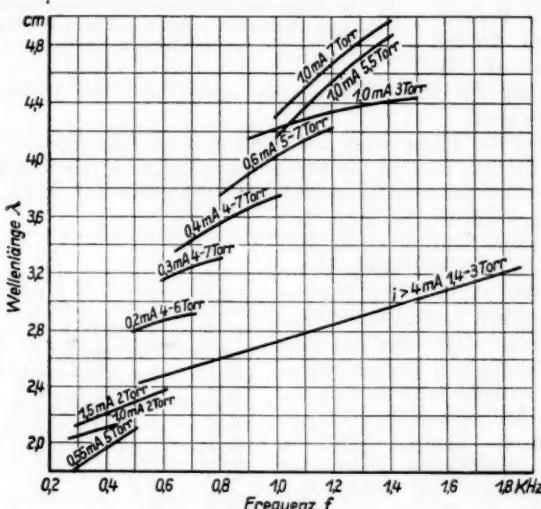


Abb. 8. Beziehung zwischen der Wellenlänge  $\lambda$  und der Frequenz  $f$

immer mit der Frequenz  $f$  zunimmt (Abb. 8). Aus der gewonnenen Abhängigkeit kann man leicht Phasen- und Gruppengeschwindigkeit berechnen. Es ist nämlich

$$u = \lambda \cdot f \quad (\text{Phasengeschwindigkeit}) \quad (2)$$

und

$$u^* = -\lambda^2 \frac{df}{d\lambda} \quad (\text{Gruppengeschwindigkeit}). \quad (6)$$

Da in dem untersuchten Bereich  $\frac{df}{d\lambda} > 0$  ist, ergibt sich der bemerkenswerte Fall, daß Phasen- und Gruppengeschwindigkeit das entgegengesetzte Vorzeichen besitzen. Dieses aus der Frequenzabhängigkeit der Wellenlänge gewonnene Ergebnis stimmt mit der direkten Beobachtung überein, daß sich eine Störung als Wellengruppe in entgegengesetzter Richtung zu den laufenden

Rohrsumms  
en die  
ch die  
regten  
t auf.  
n-Fre-  
durch  
wird.  
Wellen-  
ell ge-  
inge  $\lambda$

Schichten fortpflanzt. Auch zahlenmäßig stimmen die aus der Formel (6) berechneten Geschwindigkeiten  $u^*$  mit den aus Laufzeitmessungen von Störungen gewonnenen Gruppengeschwindigkeiten gut überein.

Genauere Messungen zeigen, daß die Wellenlänge auch noch geringfügig (bis etwa 3 %) von der Amplitude der Wellen abhängt. Im allgemeinen wird sich diese Abweichung nicht bemerkbar machen, aber in langen Rohren kann sich dieser Effekt durch Summation über viele Wellenlängen in der Phasenbeziehung auswirken. Diese Abhängigkeit dürfte die Ursache dafür sein, daß die Frequenz innerhalb eines „Niveaus“ der Strom-Frequenz-Charakteristik nicht vollkommen konstant ist, und vielleicht erklärt sie auch zusammen mit der Sättigung die dort auftretenden Hysteresiserscheinungen.

Der Einfluß des äußeren Stromkreises auf die laufenden Schichten scheint bisher noch nicht genauer untersucht worden zu sein. Einige Beobachtungsresultate zeigen jedoch eindeutig, daß eine deutliche Abhängigkeit vom Widerstand des äußeren Stromkreises vorhanden ist. So hängt unter anderem der Strom für das Einsetzen der selbsterregten laufenden Schichten vom Wechselstromwiderstand des äußeren Kreises ab. In Abb. 9 erkennt man beispielsweise, daß die Schichten für einen Vorwiderstand von  $3 \text{ M}\Omega$  erst bei  $0,92 \text{ mA}$  einsetzen, während der Einsatzstrom für  $R_s = 100 \text{ k}\Omega$  nur  $0,6 \text{ mA}$  beträgt. Daß es nur auf die Größe des Wechselstromwiderstandes ankommt, zeigt die Tatsache, daß man den gleichen Effekt erhält, wenn man dem Rohr eine entsprechende Kapazität parallel schaltet.

Weitere Untersuchungen dieser Erscheinung zeigten, daß durch den Außenwiderstand auch die Helligkeitsamplitude der Schichten entlang des Rohres stark beeinflußt wird (Abb. 10). Danach wird bei einer Verkleinerung des Außenwiderstandes  $R_s$  die Amplitude der Schichten deutlich größer. Das heißt also, daß mit kleiner werdendem Außenwiderstand die rückgekoppelte, auf den Kathodenraum wirkende Spannung größer wird. Dieses Verhalten kann durch eine Stromrückkopplung an einem Widerstand  $R_k$  erklärt werden. Dieser Widerstand  $R_k$  kann unter bestimmten Annahmen aus Amplitudemessungen ermittelt werden. Man mißt dazu bei verschiedenen Außenwiderständen aber gleichem Strom die Amplitude der laufenden Schichten entlang des Rohres, wobei man beachten muß, daß in jedem Falle an der

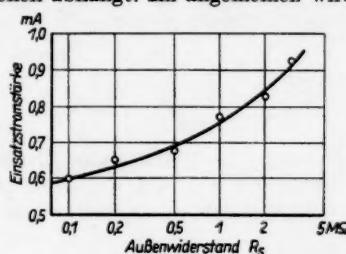


Abb. 9. Einsatzstrom selbsterregter laufender Schichten in Abhängigkeit vom Außenwiderstand (Neon, 3 Torr, Elektrodenabstand 50 cm)

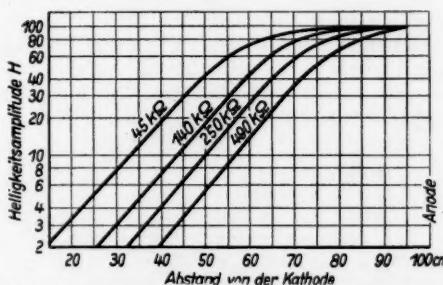


Abb. 10. Helligkeitsamplitude  $H$  entlang des Rohres bei verschiedenen Außenwiderständen  $R_s$

Anode eine vollständige Sättigung erreicht ist. Nimmt man einfacheits-  
halber an, daß die vorkommenden Widerstände Ohmsche Widerstände sind,  
so ergibt sich nach Schaltbild Abb. 3

$$U_e = U_a \frac{R_k}{R_s + R_k + R_i}.$$

Gilt weiterhin Proportionalität zwischen Helligkeit und Spannung, also

$$U_a = \dot{u}_a \cdot H_a, \quad U_e = \dot{u}_e \cdot H_e,$$

so wird

$$\frac{H_e}{H_a} = \frac{\dot{u}_e}{\dot{u}_a} \cdot \frac{R_k}{R_s + R_k + R_i}.$$

Mißt man die Helligkeitsamplituden  $H_e$  bei zwei verschiedenen Außen-  
widerständen  $R_{s1}$  und  $R_{s2}$ , so ergibt sich das Verhältnis  $H_{e1}/H_{e2}$ , da  $H_a$   
in beiden Fällen gleich groß ist, zu

$$\frac{H_{e1}}{H_{e2}} = \frac{R_{s2} + R_k + R_i}{R_{s1} + R_k + R_i}.$$

Für  $R_k + R_i$  folgt dann:

$$R_k + R_i = \frac{R_{s2} - \frac{H_{e1} R_{s1}}{H_{e2}}}{\frac{H_{e1}}{H_{e2}} - 1}. \quad (7)$$

Nimmt man noch an, daß  $R_i \ll R_k$ , so kann  $R_k$  aus dem Verhältnis der Hellig-  
keitsamplitude  $H_{e1}$  und  $H_{e2}$  an der Kathode für zwei verschiedene Außen-  
widerstände berechnet werden. Da dort die Amplituden klein sind, können  
sie nur sehr unsicher durch die Messung erfaßt werden. Das Helligkeitsver-  
hältnis  $H_1/H_2$  bleibt aber in dem Teil des Rohres, in dem kein Sättigungs-  
effekt auftritt, konstant und kann deshalb an einer günstigeren Stelle gemessen  
werden (z. B. bei 40 cm in Abb. 10).

Eine andere Möglichkeit,  $R_k$  zu ermitteln, beruht auf der Messung der  
Spannungsamplitude, die Wellengruppen am Rohr hervorrufen, in Abhängig-  
keit vom Außenwiderstand  $R_s$ . Wie bereits beschrieben, verursacht eine  
Wellengruppe, die durch eine äußere kurzzeitige Störung im Kathodengebiet

erzeugt wurde, bei ihrer Ankunft an der Anode eine Spannungs-  
schwankung am Rohr. Die Am-  
plitude  $U_{s1}$  dieser Spannungs-  
schwankungen hängt vom Außen-  
widerstand  $R_s$  entsprechend der  
Spannungsteilung an den Wider-  
ständen  $R_s$ ,  $R_k$  und  $R_i$  in folgen-  
der Weise ab:

$$\frac{U_{s1}}{U_a} = \frac{R_s}{R_s + R_k + R_i}. \quad (8)$$

Diese Abhängigkeit kann tat-  
sächlich beobachtet werden, wie  
Abb. 11 zeigt.  $U_a$  ist dabei vom  
Außenwiderstand unabhängig,  
was aus der Tatsache hervor-

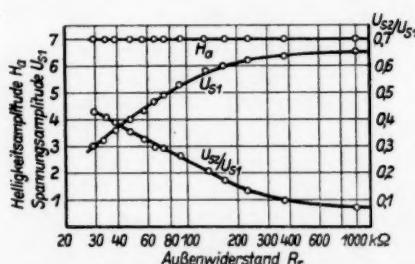


Abb. 11. Helligkeitsamplitude  $H_a$  und Span-  
nungsamplitude  $U_{s1}$  der an der Anode ankom-  
menden Wellengruppe und Verhältnis  $U_{s2}/U_{s1}$   
der Spannungsamplituden der rückgekoppelten  
Wellengruppe zur ursprünglichen Wellengruppe  
in Abhängigkeit vom Außenwiderstand  $R_s$

geht, daß die Helligkeitsamplitude  $H_a$  an der Anode konstant ist. Aus der gemessenen Abhängigkeit kann  $R_k + R_i$  sofort abgelesen werden, denn es ist  $R_k + R_i = R_s$  für  $U_s = \frac{1}{2} U_a$ , wobei  $U_a$  die Spannungsamplitude für einen sehr großen Widerstand  $R_s$  ist. Nach den beiden hier angeführten Methoden erhält man Werte für  $R_k + R_i$ , die um 20 bis 40 k $\Omega$  liegen. Die Messungen des Widerstandes  $R_k + R_i$  sind nicht sehr genau, da verschiedene Einflüsse sie verfälschen können. So muß man z. B. darauf achten, daß die durch Rückkopplung hervorgerufene 2. Wellengruppe sich mit der 1. Wellengruppe nicht überlagert. Das Verhältnis  $U_{s1}/U_{s2}$  der Amplituden dieser beiden Wellengruppen ist andererseits ein Maß für die Größe der Rückkopplung, und es zeigt sich auch hier, daß die Rückkopplung mit kleiner werdendem Außenwiderstand größer wird.

#### Charakteristische Größen zur Beschreibung der Schwingungsfortpflanzung im Plasma und deren Messung

Wie im letzten Abschnitt gezeigt, können die Eigenschaften der Fortpflanzung der laufenden Schichten in der positiven Säule durch einige der Messung leicht zugängliche Größen charakterisiert werden. Eine für die Schichten charakteristische Größe ist die Beziehung der Abhängigkeit der Wellenlänge von der Frequenz, aus der sich sowohl Phasen- als auch Gruppengeschwindigkeit berechnen lassen. Außerdem ist für die Beschreibung der Schichten die Verstärkung und deren Frequenzabhängigkeit wichtig. Statt der Angabe der gesamten Funktion  $v(f)$  genügt es im allgemeinen, die Frequenz  $f_0$  und die Größe  $v_0$  der maximalen Verstärkung zu kennen, und man braucht dann nicht die gesamte Kurve  $v(f)$  aufzunehmen. Sollte aber doch die Frequenzabhängigkeit der Verstärkung interessieren, so kann sie nun als in Größe und Frequenz normierte Resonanzkurve angegeben werden, und damit ist auch leicht ein Vergleich der Frequenzabhängigkeit unter verschiedenen Entladungsbedingungen möglich.

Zur Messung der charakteristischen Größen der laufenden Schichten können verschiedene Untersuchungsmethoden angewandt werden. Bisher wurden die Messungen meist im selbsterregten Zustand durchgeführt. Hierbei kann natürlich nur die Wellenlänge bei den sich einstellenden Frequenzen gemessen und die dazugehörige Phasengeschwindigkeit berechnet werden. Prinzipiell kann auch die Verstärkung bei diesen Frequenzen erfaßt werden.

Einen wesentlichen Fortschritt brachte die von Pekárek eingeführte Methode der Untersuchung des schwingungsfreien Gebietes mit äußeren Impulsen. Dabei kann in diesem Gebiet auch die Gruppengeschwindigkeit  $u^*$  der zur Anode laufenden Wellengruppen gemessen werden. Außerdem ergeben sich mit dieser Methode Aufschlüsse über die Art der Rückkopplung.

Eine dritte Untersuchungsmethode, die auch die Frequenzabhängigkeit von Wellenlänge und Verstärkung zu ermitteln gestattet, ist die Erregung mit Sinusspannungen, die für die Messungen in dieser Arbeit vor allem angewandt wurde. Aus der Frequenzabhängigkeit der Wellenlänge kann ohne weiteres Phasen- und Gruppengeschwindigkeit berechnet werden, aus der Frequenzabhängigkeit der Verstärkung ergibt sich die Resonanzfrequenz  $f_0$ , die maximale Verstärkung  $v_0$  und die normierte Resonanzkurve.

Die beiden letztgenannten Methoden unterscheiden sich im wesentlichen dadurch, daß das Plasma bei der Impulsmethode mit einem breiten Frequenzspektrum erregt wird, während man bei der letzten Methode eine diskrete Frequenz wählen kann, und dadurch Frequenzabhängigkeiten besonders leicht gemessen werden können.

Selbstverständlich sind beide Methoden auf das Gebiet beschränkt, in dem keine selbsterregten Schichten auftreten. Damit sie aber auch in dem normalerweise selbsterregten Bereich angewandt werden können, muß versucht werden, das Einsetzen selbsterregter Schwingungen zu verhindern. Der Schwingungseinsatz ist durch  $\frac{R}{L} \cdot \frac{1}{C} = 1$  bestimmt, und es muß also möglich sein, durch Verkleinern von  $\frac{R}{L}$  oder  $\frac{1}{C}$  das schwingungsfreie Gebiet zu erweitern. Da der Rückkopplungsfaktor  $\frac{R}{L}$  mit zunehmendem Außenwiderstand  $R$  kleiner wird, wird man einem möglichst großen Widerstand  $R$ , verwenden (s. Abb. 9). Am besten bewährt hat sich dazu eine Sättigungsdiode. Die Gesamtverstärkung kann z. B. in einem kurzen Rohr klein gehalten werden, aber das ist für die Messungen ungünstig. Wesentlich besser ist es, die Verstärkung nur in einem kurzen Stück der positiven Säule sehr viel kleiner als 1 zu machen. Dies erreicht man z. B. mit einem Magnetfeld oder einer in das Rohr eingesetzten Kapillare, durch die die positive Säule stark eingeschnürt wird. An dieser Stelle wird die Amplitude der laufenden Schichten stark verkleinert. Durch Abschalten des Magnetfeldes oder Entfernen der Kapillare in einen seitlichen Ansatz kann nachgewiesen werden, daß durch Magnetfeld oder Kapillare die Ausbreitungsbedingungen der Wellen im übrigen Plasma nicht beeinflußt werden.

Die besten Ergebnisse in dieser Richtung konnten mit Kapillarrohren erreicht werden. So gelingt es z. B. in einem 55 cm langen mit etwa 1,4 Torr Neon gefüllten Rohr das Einsetzen der selbsterregten Schwingungen durch eine etwa 1 mm starke Kapillare vor der Anode von 3 mA auf über 10 mA zu verschieben (Abb. 5). Zur Aufnahme der ungestörten Resonanzkurven des Plasmas genügt es jedoch nicht nur, die Selbsterregung zu verhindern, sondern die Verstärkung muß so klein sein, daß die rückgekoppelten Wellen zu vernachlässigen sind. Im oben angeführten Beispiel wäre das bis etwa 9 mA der Fall.

### Meßergebnisse

In dem folgenden Abschnitt sollen die Meßergebnisse der charakteristischen Größen der laufenden Schichten in dem untersuchten Bereich angegeben werden. Alle zu den folgenden Messungen benutzten Entladungsrohre hatten einen Durchmesser von 2 cm; die verwendeten becherförmigen Eisenelektroden hatten einen Durchmesser von 1 cm.

Zunächst sei noch einmal auf die Abb. 1 verwiesen. In diesem Stromdruckdiagramm gibt die dünn gestrichelte Linie die ungefähre Lage der Grenze zwischen dem Gebiet der homogenen Säule und den Bereichen mit selbsterregten laufenden Schichten an. Die Lage der Grenze hängt aus den oben angeführten Gründen von Rückkopplung und Verstärkung ab. In dieser Abbildung sind weiterhin einige Linien gleicher Resonanzfrequenz eingezeichnet. Diese Frequenzen sind größtenteils aus Messungen mit dem Kapillarrohr gewonnen worden; die Frequenzen der selbsterregten Schwingungen können davon wegen der Phasenbedingung etwas abweichen.

Es fällt auf, daß zwischen etwa 3 und 6 Torr zwei Resonanzfrequenzen beobachtet werden. Zu größeren Drucken hin ist die Verstärkung der hohen Resonanzfrequenz größer, zu kleineren Drucken hin dagegen die Verstärkung der tiefen Resonanzfrequenz. Oberhalb von 5 Torr werden sich also laufende Schichten mit der hohen Frequenz erregen, unterhalb von 4 Torr dagegen solche mit der niedrigen Frequenz. Eine punktierte Linie gibt etwa die Grenze zwischen den beiden Frequenzbereichen an. Ein ähnlicher Übergang erfolgt etwa bei 1 Torr zu den sehr hohen Frequenzen von etwa 20 kHz. Die Wellenlängen liegen hier auch in der gleichen Größenordnung und die Rückkopplungsbeziehung scheint in der gleichen Weise zu gelten wie in den niedrigen Frequenzbereichen.

Als eine der wichtigsten Beziehungen stellte sich im Laufe der Untersuchungen diejenige zwischen Wellenlänge und Frequenz heraus (Abb. 8). Hier kommt der Unterschied zwischen dem Bereich mit der niedrigen und der höheren Resonanzfrequenz noch deutlicher zum Ausdruck. Der Bereich mit der niedrigen Resonanzfrequenz hat nämlich durchweg eine kleinere Wellenlänge (etwa zwischen 2 und 3 cm) als der Bereich mit der höheren Frequenz (etwa zwischen 3 und 5 cm). Bei kleinen Stromstärken ist eine deutliche Stromabhängigkeit der Wellenlängen-Frequenz-Beziehung festzustellen, während die Druckabhängigkeit im allgemeinen geringer ist, so daß einige Kurven für verschiedene Drucke zusammengefaßt werden konnten. Ebenso wurden die Kurven für größere Ströme als 4 mA und kleine Drucke der Übersichtlichkeit halber zusammengefaßt, weil sich die Kurven nur sehr wenig voneinander unterscheiden.

Diese Messungen wurden nicht im selbsterregten Zustand sondern bei Fremderregung durchgeführt. Bei einem festen Strom und Druck konnte nur ein verhältnismäßig kleiner Frequenzbereich überstrichen werden, da die Messungen nur im Gebiet nicht zu kleiner Verstärkung möglich sind. Außerdem ist die Wellenlänge etwas (etwa 3 %) von der Amplitude der laufenden Schichten abhängig. Da es nicht immer möglich ist, bei gleicher Amplitude zu messen, muß man kleine Ungenauigkeiten in Kauf nehmen. Wegen der bestehenden Amplitudenabhängigkeit wird die Angabe der Wellenlängen-Frequenz-Beziehung nicht ganz eindeutig. Dies macht sich besonders bei der Berechnung der Gruppengeschwindigkeit bemerkbar, da hier außer der Wellenlänge  $\lambda$  auch noch die Steigung  $df/d\lambda$  der Kurven eingeht, so daß die berechneten von den aus Laufzeitmessungen gewonnenen Werten bis zu 10 % voneinander abweichen können.

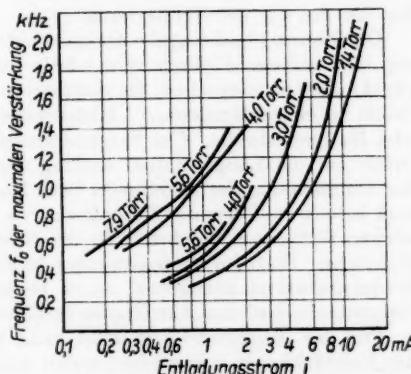


Abb. 12. Strom- und Druckabhängigkeit der Frequenz  $f_0$  der max. Verstärkung

Zur Kenntnis der Verstärkung  $v(f)$  ist es notwendig, die Resonanzfrequenz  $f_0$ , die Verstärkung  $v_0$  und die Form der Resonanzkurve zu bestimmen. Interessant ist vor allem die Abhängigkeit der Resonanzfrequenz  $f_0$  von Stromstärke und Druck (Abb. 12). Die Frequenz  $f_0$  nimmt bei konstantem Druck mit größer werdender Stromstärke zu, und das gleiche tritt ebenfalls bei konstantem Strom und zunehmendem Druck auf. Ebenso wie in Abb. 1 erkennt man, daß bei einigen Drucken zwei Resonanzfrequenzen auftreten, von denen die obere Frequenz etwa doppelt so groß ist wie die untere. Beide Frequenzbereiche sind hier deutlich voneinander getrennt. Die Resonanzfrequenz kann am besten mit Fremderregung am Kapillarrohr gemessen werden, sie kann aber auch an nähernd aus der Strom-Frequenz-Charakteristik selbsterregter laufender Schichten ermittelt werden.

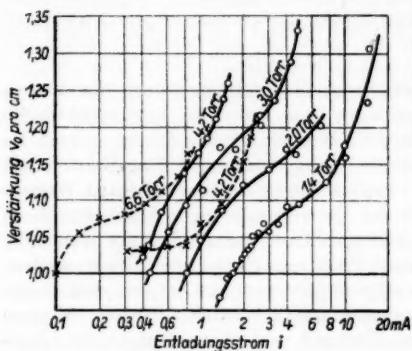


Abb. 13. Verstärkung  $v_0$  pro cm für die Resonanzfrequenz. Ausgezogene Linien für die tiefere, gestrichelte Linien für die höhere Resonanzfrequenz

Rohr die Gesamtverstärkung schon  $1,10^{100} \approx 1,4 \cdot 10^4$  betragen. Die beiden Frequenzbereiche unterscheiden sich hier im wesentlichen durch die Form der Kurven für die Verstärkung.

Die Messung und Angabe der normierten Resonanzkurven in Abhängigkeit von den äußeren Bedingungen würde sehr umfangreich sein. Es ist daher zweckmäßig zu versuchen, die normierten Resonanzkurven durch eine einzige Größe zu charakterisieren. Üblicherweise benutzt man dazu die Bandbreite oder Halbwertsbreite. Um Vergleichsmöglichkeiten zu haben, wird man diese Größe auf die Längeneinheit entlang der positiven Säule beziehen müssen. Zur Umrechnung der Bandbreite bzw. Halbwertsbreite auf die Längeneinheit muß jedoch die Form der Resonanzkurve bekannt sein, so daß die Wahl einer solchen Größe zur Beschreibung der Selektivität in diesem Falle nicht sehr günstig ist. Statt für ein bestimmtes Amplitudenverhältnis den dazugehörigen Frequenzabstand anzugeben, ist es besser, umgekehrt für einen gegebenen Frequenzabstand das Amplitudenverhältnis zu bestimmen.

Für das Amplitudenverhältnis kann man natürlich auch das Verhältnis der Verstärkungen verwenden; wählt man die auf einen cm bezogenen Verstärkungen, so ist die Normierung auf die Längeneinheit damit automatisch erfüllt. Aus meßtechnischen Gründen hat sich für den zu wählenden Frequenzabstand eine Doppelverstimmung

$$y = \frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} = 0,35$$

quenz  
In-  
strom-  
Druck  
s bei  
1 er-  
, von  
Fre-  
entlich  
hanz-  
emdm-  
essen  
an-  
nzenz-  
aufen-  
1.  
g bei  
in  
o em  
über  
stark  
Ver-  
nem  
der  
aren.  
von  
ngen  
iden  
orm  
  
keit  
scher  
zige  
reite  
diese  
sen.  
heit  
iner  
sehr  
gen  
nen  
  
tnis  
Ver-  
isch  
enz-

als günstig erwiesen. In Abb. 14 ist für ein Beispiel dieses Verhältnis  $\frac{v_{0,35}}{v_0}$  in Abhängigkeit vom Strom dargestellt, und es ergibt sich, daß die Selektivität des Plasmas für steigende Entladungsströme etwas größer wird.

Die hier in Neon bei niedrigen Strömen über die Rückkopplungsbeziehungen bei laufenden Schichten entwickelten Vorstellungen scheinen auch in anderen Fällen zu gelten, was aber durch Untersuchungen in anderen Gasen und unter anderen Bedingungen noch gezeigt werden müßte. Durch Vermeidung der Rückkopplung ist es möglich, die Eigenschaften der laufenden Schichten zu messen, die nur vom Plasma abhängen. Aber gerade solche von den Randbedingungen unabhängige Größen wird man brauchen, um die Gültigkeit einer Theorie der laufenden Schichten überprüfen zu können.

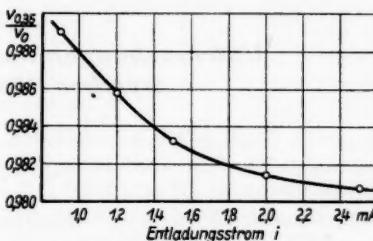


Abb. 14. Verhältnis der Verstärkung  $v_{0,35}$  bei einer Doppelverstimmung von 0,35 zur Verstärkung  $v_0$  der Resonanzfrequenz in Abhängigkeit vom Entladungsstrom (Neon, 2 Torr)

Greifswald, Physikalisches Institut der Universität.

Bei der Redaktion eingegangen am 7. Juli 1958.

# Untersuchungen über die Totalreflexion weicher Röntgenstrahlen

Von Rolf Groth<sup>1)</sup>

Mit 7 Abbildungen

## Inhaltsübersicht

Die streifende Totalreflexion weicher Röntgenstrahlen von 9 Å Wellenlänge wird an Glas, Silber- und Goldaufdampfschichten untersucht. Die Reflexionskurven für Glas und Silber zeigen den zu erwartenden Verlauf, während bei Gold eine starke Anomalie auftritt. Aus den photographischen Aufnahmen wird die Welligkeit des benutzten Planspiegels bestimmt und die mikrokristalline Oberflächenrauigkeit abgeschätzt.

## Einleitung

In den letzten Jahren hat die streifende Totalreflexion weicher Röntgenstrahlen Bedeutung für die Röntgenstrahlmikroskopie erlangt. In diesem Wellenlängengebiet von  $\lambda = 5 \text{ Å}$  bis  $\lambda = 30 \text{ Å}$  liegen nur wenige quantitative Messungen vor. Bei der Entwicklung einer Röntgenoptik ist nun gerade eine genaue Kenntnis des Reflexionsvermögens in Abhängigkeit vom Glanzwinkel erforderlich. Für das Auflösungsvermögen eines solchen Spiegelsystems interessiert ferner, in welchem Maße der reflektierte Strahl durch die Rauigkeit der Spiegeloberfläche störend verbreitert wird. Diese Frage ist anscheinend für weiche Röntgenstrahlen noch nicht untersucht worden.

Das Reflexionsvermögen lässt sich nach den Formeln der Metalloptik berechnen. Für das Verhältnis  $R$  von reflektierter zu einfallender Strahlung erhält man nach E. Dershem und M. Schein<sup>2)</sup>:

$$R = \frac{(\alpha - a)^2 + b^2}{(\alpha + a)^2 + b^2},$$

wobei:

$$b = \gamma/a, \quad a^2 = \frac{1}{2}(\alpha^2 - 2\delta + \sqrt{(2\delta - \alpha^2)^2 + 4\gamma^2}).$$

Dabei ist  $\alpha$  der Winkel zwischen einfallender Strahlung und reflektierender Fläche,  $\gamma$  der wellenoptische Absorptionskoeffizient und  $\delta$  das Dekrement des Brechungsindex. Die Größen  $\gamma$  und  $\delta$  sind mit dem gewöhnlichen Absorptionskoeffizienten  $\mu$  und dem komplexen Brechungsindex  $n$  durch die Be-

<sup>1)</sup> Marburger Diplomarbeit 1956, vorgetragen auf der Physikertagung in Bad Nauheim 1957.

<sup>2)</sup> E. Dershem, M. Schein, Physic. Rev. 37, 1246 (1931).

ziehungen

$$\mu = \frac{4\pi\gamma}{\lambda}$$

$$n = 1 - \delta - i\gamma$$

verknüpft.

### Apparativ er Aufbau

Die Röntgenröhre wurde mit 2 kV Gleichspannung betrieben. Als Antikathodenmaterial diente Wolfram. Neben einer schwachen Emission der *M*-Serie von Wolfram zwischen 8 und 9 Å wird also im wesentlichen das Bremskontinuum angeregt. Die Intensitätsverteilung des Kontinuums läßt sich im Gebiet von 8–12 Å bei Anregungsspannungen von 1,1 bis 2 kV nach S. T. Stephenson und F. D. Mason<sup>3)</sup> durch die Beziehung

$$I(\lambda) = \text{const} \frac{z}{\lambda^5} \left( \frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda} \right)$$

darstellen, wobei:

$z$  = Ordnungszahl des Antikathodenmaterials,

$\lambda$  = Wellenlänge,

$\lambda_0$  = Grenzwellenlänge.

Als Filter diente eine 9,2  $\mu$  dicke Aluminium-Folie, die unterhalb der *K*-Kante von Al bei 7,93 Å praktisch undurchlässig ist. Oberhalb von 7,93 Å wird der relativ steile Intensitätsabfall des Kontinuums nach längeren Wellen hin noch durch die zunehmende Absorption in der Folie verstärkt. Es resultiert eine verhältnismäßig gut monochromatische Strahlung mit einem Schwerpunkt bei 9 Å.

In Abb. 1 ist die Versuchsanordnung schematisch dargestellt. Durch die beiden Spalte wird ein enges Strahlenbündel ausgeblendet, es trifft auf den Spiegel, wird total reflektiert und fällt schließlich auf den Filmstreifen. Bei der Einstellung der Glanzwinkel wird der Spiegel über eine Vakuum-Dreh-

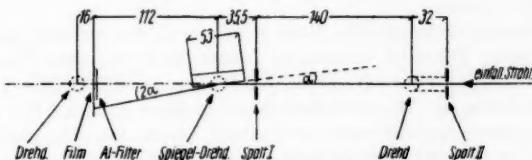


Abb. 1. Versuchsanordnung

durchführung mikrometrisch geschwenkt. Über eine weitere Drehführung kann die Filmkassette quer zum Strahlengang verschoben werden, so daß eine große Zahl von Justieraufnahmen in einem Arbeitsgang und die Schwärzungsstufen zusammen mit den Reflexen auf demselben Filmstreifen aufgenommen werden können. Außerdem hat man damit die Möglichkeit, während der Aufnahme der Reflexionskurven etwaige Intensitätsschwankungen der Röntgenröhre zu untersuchen. Die Spaltbreiten betrugen für

<sup>3)</sup> S. T. Stephenson, F. D. Mason, Physic. Rev. 75, 1711 (1949).

Spalt  $1 \frac{1}{50}$  mm, für Spalt  $2 \frac{1}{40}$  mm, Abstand der Spalte 172 mm. Bei diesen geometrischen Verhältnissen beträgt der halbe Öffnungswinkel des Röntgenstrahlbündels  $28''$ .

### Die Güte der optischen Abbildung

Die Schärfe der Abbildung bei streifender Totalreflexion wurde bereits von H. Kiessig<sup>4)</sup> im Wellenlängengebiet von 1 bis 2 Å untersucht. Auf die Ursachen einer Linienverbreiterung geht H. Kiessig allerdings nicht näher ein. Diese Dinge sollen hier nun etwas eingehender behandelt werden. Grundsätzlich kann eine Linienverbreiterung durch zwei verschiedene Oberflächeneffekte hervorgerufen werden. Einmal ist ein Planspiegel nie ideal eben geschliffen, sondern hat immer eine gewisse Welligkeit. Größere Oberflächenbereiche haben eine Flächennormale, die von der „mittleren“ etwas abweicht. Je streifender nun das Röntgenstrahlbündel auftrifft, um so größer ist die Fläche, die an der Reflexion beteiligt ist, um so stärker wirkt sich die Welligkeit in einer Linienverbreiterung aus. Dieser Oberflächeneffekt nimmt also mit abnehmendem Glanzwinkel zu.

Die mikrokristallinen Oberflächenrauhigkeiten, die Unebenheiten im „Kleinen“, stören ebenfalls die reguläre Reflexion. Zwischen der Rauigkeit, d. h. dem normal zur Oberfläche gemessenen Abstand  $h$  der höchsten und tiefsten Stellen und dem Gangunterschied  $\Delta$  zweier reflektierter Strahlen, gilt die Beziehung:

$$\Delta = 2h \sin \alpha \quad \alpha = \text{Glanzwinkel.}$$

Für eine noch scharfe Abbildung über den Spiegel muß nach F. Jentzsch<sup>5)</sup> die Bedingung

$$\Delta = 2h \sin \alpha \approx 2h \alpha \leq \lambda/4$$

erfüllt sein.

Werden die Glanzwinkel größer als der kritische Glanzwinkel  $\alpha = \lambda/8h$ , dann werden die Reflexe durch Interferenzeffekte diffus verbreitert. Über ihre entgegengesetzte Winkelabhängigkeit lassen sich damit die beiden Oberflächeneffekte trennen.

Das Reflexionsvermögen für Glas wurde an einer optisch polierten Glasplatte gemessen. Dieselbe Glasplatte diente auch bei den Untersuchungen an Ag und Au als Träger für die Aufdampfschichten, so daß in allen Fällen gleiche Bedingungen vorlagen. Die Schichtdicken betrugen 2500 Å. Bei der Messung des Reflexionsvermögens wurde der Spiegel jeweils um den gleichen Winkel weitergedreht und äquidistante Reflexionen aufgenommen. Auf dem Filmstreifen (Röntgenfilm Perutz X) erhält man schmale, scharfe Schwärzungsstreifen von  $40 \mu$  Breite. Zur Untersuchung etwaiger Linienverbreiterungen wurden deren Linienprofile mit einem Registrierphotometer aufgenommen. In Abb. 2 ist eine solche Photometerkurve für Glas bei einem Winkelabstand der Reflexe von  $9'24''$ , in Abb. 3 für Ag bei einem Winkelabstand von  $14'6''$  wiedergegeben. In Abb. 4 ist die entsprechende Kurve für gerade Durchgänge verschiedener Intensität dargestellt. Vergleicht man nun die Linienprofile der Reflexe mit denen gerader Durchgänge gleicher Höhe, so findet man nur

<sup>4)</sup> H. Kiessig, Ann. Physik **10**, 715 (1931).

<sup>5)</sup> F. Jentzsch, Physik. Z. **30**, 268 (1929).

bei den Glanzwinkeln unter  $20'$  eine geringfügige Verbreiterung, wie sie an den übereinandergezeichneten Profilen der Abb. 4 (unten) zu erkennen ist. Bei größeren Glanzwinkeln sind die Reflexe für Glas und auch für Ag und Au völlig scharf. Die Flankenverbreiterung ist also nur durch die Welligkeit des Planspiegels bedingt. Aus ihr läßt sich der Grad von Unebenheit in der Oberfläche recht genau bestimmen. Es sei  $s_0$  die Schwärzungsbreite des geraden Durchgangs und  $\Delta\alpha$  die maximale Winkelabweichung für die Oberfläche in

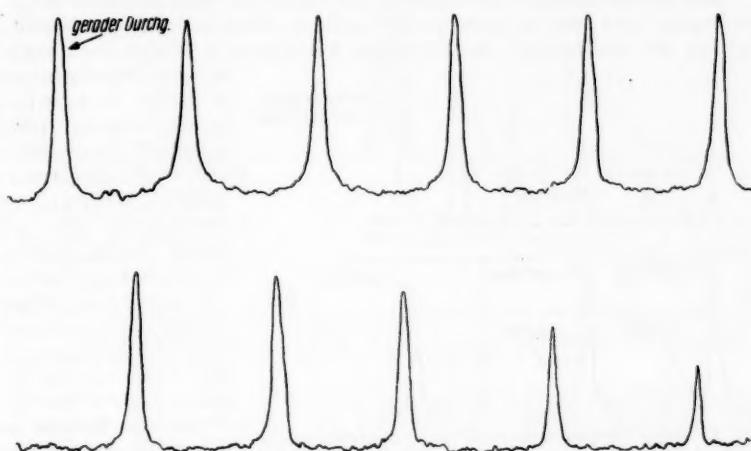


Abb. 2. Photometerkurven bei Totalreflexion an Glas (Winkelabstand der Reflexe  $9'24''$ )

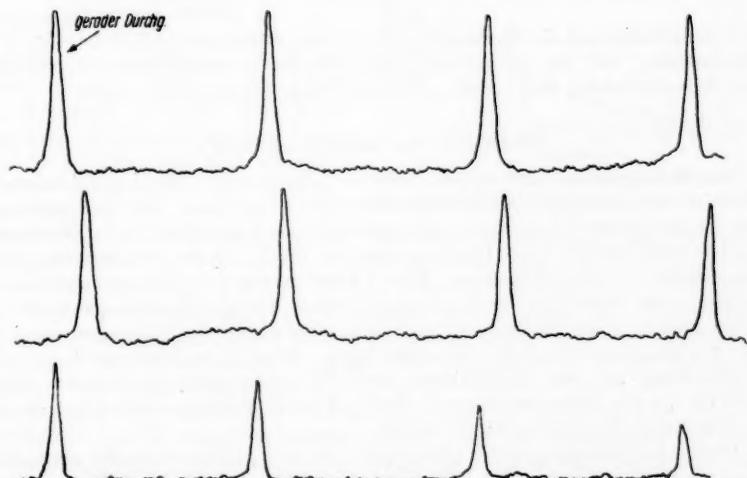


Abb. 3. Photometerkurven bei Totalreflexion an Silber (Winkelabstand der Reflexe  $14'6''$ )

der Ebene, die durch die Flächennormale und den einfallenden Strahl gebildet wird. Dann ergibt sich für die Schwärzungsbreite  $s$  des reflektierten Strahls:

$$s = s_0 + 2 \cdot \Delta\alpha,$$

wobei:

$$a = \text{Abstand Spiegel—Film},$$

$$s_0 = 40 \mu.$$

Eine zehnprozentige Verbreiterung der Reflexion gegenüber dem geraden Durchgang tritt nun im Linienprofil bereits deutlich hervor. Das bedeutet, daß bei den vorliegenden geometrischen Verhältnissen Winkelabweichungen

in der Oberfläche von  $4''$  sicher nachgewiesen werden können. Durch streifende Totalreflexion von Röntgenstrahlen kann die Welligkeit von Planspiegeln also sehr genau erfaßt werden. Aus den Linienprofilen von Abb. 4 (Glas: Glanzwinkel  $9'24''$ ) ergibt sich etwa eine dreißigprozentige Verbreiterung und damit ein  $\Delta\alpha$  von  $12''$ .

Da die Reflexe bei den Glanzwinkeln  $> 20'$  bis zu den größten Winkeln von  $2^{\circ}40'$  (Ag) und  $2^{\circ}30'$  (Au) völlig scharf

Abb. 4. oben: Photometerkurven von Intensitätsstufen, unten: Linienprofile von Glas- und Ag-Reflexen im Vergleich zu Intensitätsstufen gleicher Höhe (Glas: Glanzwinkel  $9'24''$ ,  $18'48''$ ; Ag: Glanzwinkel  $14'6''$ )

sind, erhält man aus der Bedingung für reguläre Reflexion  $\alpha_{\text{Max}} \cdot 2 h \leq \lambda/4$  als Abschätzung, daß die mikrokristallinen Oberflächenrauhigkeiten der Gold- und Silberschichten und damit auch des Trägers unter  $25 \text{ \AA}$  liegen.

### Diskussion der Reflexionskurven

Die Meßergebnisse sind in den Abb. 5–7 dargestellt. Die eingezeichneten Werte entsprechen jeweils 2 photographischen Aufnahmen. Die Meßgenauigkeit ist im wesentlichen durch die photographisch-photometrische Methode gegeben und beträgt 2 %. Dagegen sind die Fehler in der Bestimmung der Glanzwinkel zu vernachlässigen. Eine Untersuchung von Intensitätsschwankungen in der Strahlung der Antikathode ergab, daß die Strahlungsintensität in den ersten 15 bis 20 Minuten nach Inbetriebnahme der Röhre um etwa 8 bis 15 % abnahm, dann aber konstant blieb. Möglich ist, daß durch dünne Niederschläge auf der Antikathode deren Eigenabsorption beeinflußt wird (etwa Öl von der Diffusionspumpe). Nach 15 bis 20 Minuten scheint sich dann ein Gleichgewicht eingestellt zu haben.

Bei der Reflexionskurve für Glas (Abb. 5, Kurve 2) fällt wegen der geringen Absorption die Intensität am Grenzwinkel steil ab. Die Kurve 1 ist nach der Reflexionsformel für  $\delta = 2,2 \cdot 10^{-4}$  und  $\gamma = 0,08 \cdot 10^{-4}$  berechnet und gibt

die beste Anpassung, die durch Variation von  $\delta$  und  $\gamma$  möglich ist. Daß es nicht gelingt, die Meßwerte durch eine gerechnete Kurve befriedigend darzustellen, ist dadurch bedingt, daß die Strahlung nicht streng monochromatisch ist. Die Anteile mit  $\lambda < 9 \text{ \AA}$  haben einen etwas kleineren, die Anteile mit  $\lambda > 9 \text{ \AA}$  einen etwas größeren Grenzwinkel als der Wellenlängenschwerpunkt. Daraus resultiert insgesamt wegen des steilen Intensitätsabfalls am Grenz-

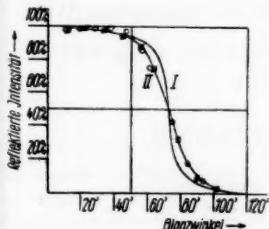


Abb. 5. Reflektierte Intensität als Funktion des Glanzwinkels bei Totalreflexion an Glas

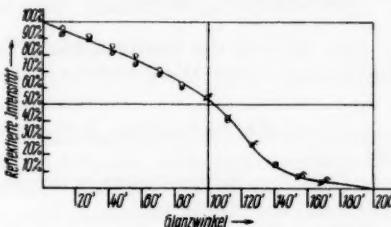


Abb. 6. Reflektierte Intensität als Funktion des Glanzwinkels bei Totalreflexion an Silber

winkel eine Verflachung der Meßkurve im Bereich vor dem Grenzwinkel des Wellenlängenschwerpunkts und eine Anhebung bei größeren Glanzwinkeln. Diese Unterschiede weist auch die Kurve 2 gegenüber 1 auf.

Bei Silber (Abb. 6) tritt kein scharfer Grenzwinkel der Totalreflexion mehr auf, sondern die Intensität fällt von 100 % fast gleichmäßig auf Null ab. Die eingezeichnete Kurve ist für  $\delta = 6,7 \cdot 10^{-4}$  und  $\gamma = 1,8 \cdot 10^{-4}$  gerechnet. R. W. Hendrick<sup>6)</sup> hat mit Alk-Strahlung ( $\lambda = 8,33 \text{ \AA}$ ) Reflexionsmessungen an Glas und Metallaufdampfschichten durchgeführt. Damit ist nun nachträglich ein Vergleich mit den hier vorliegenden Messungen möglich. Bei Glas und Silber stimmen die Reflexionskurven bis auf geringe Unterschiede, die durch die etwas verschiedene Zusammensetzung der Strahlung bedingt sind, gut überein. Dagegen treten bei Gold große Unterschiede auf. Nach R. W. Hendrick ergibt sich für Gold ( $\lambda = 8,33 \text{ \AA}$ )  $\delta = 6,95 \cdot 10^{-4}$  und  $\gamma = 2,22 \cdot 10^{-4}$ . Dabei fällt der  $\delta$ -Wert um 18,6 % kleiner als der nach der Dispersions-theorie berechnete aus. Diese Abweichung kann allein durch eine Auflockerung der Goldschicht um 18,6 % gegenüber dem massiven Metall gedeutet werden. Bei meinen Messungen ( $\delta = 2,78 \cdot 10^{-4}$  und  $\gamma = 5,55 \cdot 10^{-4}$ ) müßte man dagegen schon annehmen, daß die Goldschicht eine Dichte hat, die nur ein Drittel der des massiven Metalls beträgt. Da nun andererseits der Absorptionskoeffizient proportional der Dichte ist, ergäbe sich damit aus der

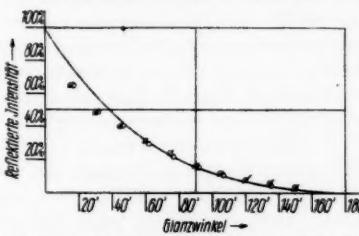


Abb. 7. Reflektierte Intensität als Funktion des Glanzwinkels bei Totalreflexion an Gold

<sup>6)</sup> R. W. Hendrick, J. opt. Soc. Amer. **47**, 156 (1957).

Reflexionskurve ein viel zu großer  $\gamma$ -Wert. Allein mit einer Schichtauflockerung kann also die Diskrepanz nicht erklärt werden. Wesentlich könnte sein, daß in der Versuchsanordnung von R. W. Hendrick die Metallschichten in der Apparatur selbst aufgedampft und dann durchgemessen wurden, ohne daß sie mit Luft in Berührung kamen. Es ist möglich, daß in meinem Falle durch Bildung einer dünnen Oxydschicht bei Gold das Reflexionsvermögen herabgesetzt wurde.

Dem Direktor des Instituts, Herrn Prof. Dr. H. Wolter, danke ich für die Anregung zu dieser Arbeit und für wertvolle Hinweise.

Marburg/Lahn, Institut für Angewandte Physik.

Bei der Redaktion eingegangen am 15. Juli 1958.

## **Der totale Wirkungsquerschnitt und der Diffusionsstreuquerschnitt von Hartree-Potentialen**

*Von T. Tietz*

### **Inhaltsübersicht**

Wie bekannt führt die Theorie der Elektronenstöße an neutralen Atomen zu einem Mehrelektronenproblem. Die wichtigsten wellenmechanischen Näherungsverfahren für die Elektronenstoßprobleme an Atomen sind das Variationsverfahren und die Methode des „self consistent field“ von Hartree, bzw. von Hartree und Fock. Das wellenmechanische Variationsverfahren ist mit mathematischen Schwierigkeiten verbunden. Mit Hilfe der von Hartree entwickelten Methode des „self-consistent field“, welche von Fock weiter ausgebaut wurde, kann man Elektronenstoßprobleme an Atomen behandeln. Allerdings ist die Anwendung dieser Methode mit einer enormen Rechenarbeit verbunden, die nur mit entsprechenden Maschinen bewältigt werden kann. Außerdem ist es von Nachteil, daß man mit der Hartreeschen oder Hartree-Fock'schen Methode für die Gesamt- bzw. Diffusionsstreuquerschnitte keine analytischen Ausdrücke, sondern nur numerische Tabellen erhält. In dieser Arbeit leiten wir in der ersten Bornschen Näherung Ausdrücke für den Gesamt- und Diffusionsstreuquerschnitt von Elektronen an neutralen Atomen ab. Das Wesentliche unserer Ableitung besteht darin, daß für die Hartreeschen Potentiale geeignete analytische Approximationen angenommen werden. Holtzman, Ruark und Byatt haben solche Näherungslösungen für Hartreesche Potentiale angegeben, welche für unsere Zwecke sehr geeignet sind. Sie sind in Tab. 1 zusammengestellt, Tab. 2, 3, 4 enthalten die numerischen Resultate über den elastischen differentiellen Streuquerschnitt, sowie auch die über die Gesamt- und Diffusionsstreuquerschnitte in der ersten Bornschen Näherung für die oben genannten Hartree-Potentiale.

### **Einleitung und Theorie**

Die elastischen Elektronenstöße an Atomen sind wie bekannt definiert als solche Zusammenstöße, welche den inneren Anfangszustand des Atoms unverändert lassen. In unserem Falle heißt es, daß die Atome nach den Elektronenstößen sich wieder im Grundzustand befinden. Die Gesetze der Erhaltung der Energie und des Impulses zeigen<sup>1)</sup>, daß bei Elektronenstößen an Atomen ein kleiner Austausch von Energie zwischen dem stoßenden Elektron und dem Atom stattfindet, welcher sich als Rückstoß des Atoms äußert. Man kann leicht zeigen, daß einem ursprünglich ruhenden Atom ein

<sup>1)</sup> T. D. Holstein, Theory of the TR Swutch-Westinghouse Research Laboratories.

Bruchteil  $\Delta E/E$  der Energie  $E$  des stoßenden Elektrons übertragen wird, wo

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{2m}{M} (1 - \cos \Theta). \quad (1)$$

In dieser Formel ist  $\Theta$  der Streuwinkel,  $m$  ist die Elektronenmasse und  $M$  die Atommasse. In Formel (1) sind höhere Potenzen von  $m/M$  vernachlässigt. Der mittlere relative Energieverlust infolge eines Elektronenstoßes beträgt  $2(m/M)(Q_d/Q_0)$ . Hierin bezeichnet  $Q_0$  den elastischen Gesamtstreuquerschnitt und  $Q_d$  den Diffusionsquerschnitt. Im Falle bewegter Atome muß die Gl. (1) abgeändert werden. In dieser Arbeit wollen wir jedoch voraussetzen, daß die Temperatur genügend niedrig ist, so daß wir die Temperaturbewegung vernachlässigen können. Der elastische Gesamtstreuquerschnitt  $Q_0$  ist bekanntlich durch folgenden Ausdruck gegeben<sup>2)</sup>.

$$Q_0 = 2\pi \int_0^\pi I_0(\Theta) \sin \Theta d\Theta. \quad (2)$$

Hier bezeichnet  $I_0(\Theta)$  den elastischen differentiellen Streuquerschnitt. Aus dem Gesamtstreuquerschnitt  $Q_0$  ergibt sich die mittlere freie Weglänge  $\lambda_0$  zu:

$$\lambda_0 = (N Q_0)^{-1}. \quad (3)$$

$N$  ist die Zahl der Atome in der Volumeneinheit. Der Diffusionsstreuquerschnitt  $Q_d$  stellt sich wie bekannt durch folgende Formel dar<sup>3)</sup>.

$$\begin{aligned} Q_d &= 2\pi \int_0^\pi I_0(\Theta) (1 - \cos \Theta) \sin \Theta d\Theta \\ &= Q_0 - 2\pi \int_0^\pi I_0(\Theta) \cos \Theta \sin \Theta d\Theta = Q_0 + Q_1. \end{aligned} \quad (4)$$

Aus dem Diffusionsstreuquerschnitt  $Q_d$  folgt als mittlere freie Weglänge für Diffusion  $\lambda_d$ :

$$\lambda_d = (N Q_d)^{-1}. \quad (5)$$

Mit Hilfe der reduzierten effektiven Kernladung der neutralen Atome  $Z_p/Z$  läßt sich für sämtliche Atome das effektive Hartreesche Potential in folgender Form schreiben

$$V(r) = -\frac{Z e^2}{r} \cdot \frac{Z_p}{Z}. \quad (6)$$

$Z$  ist die Ordnungszahl und  $e$  ist die Elektronenladung. Ruark<sup>4)</sup>, Holtzman<sup>5)</sup> und Byatt<sup>6)</sup> haben gezeigt, daß die reduzierte effektive Kernladung  $Z_p/Z$  sich darstellen läßt durch den Ausdruck

$$Z_p/Z = \sum_n c_n e^{-b_n x}. \quad (7)$$

<sup>2)</sup> N. F. Mott u. H. S. Massey, The Theory of Atomic Collisions. Oxford 1950, S. 136.

<sup>3)</sup> H. S. Massey u. E. H. Burhop, Electronic and Ionic Impact Phenomena. Oxford 1953, S. 15.

<sup>4)</sup> A. E. Ruark, Physic. Rev. 57, 62 (1940).

<sup>5)</sup> J. Holtzman, Z. Physik 55, 437 (1929); 66, 49 (1930).

<sup>6)</sup> W. J. Byatt, Physic. Rev. 104, 1298 (1956).

Hierin ist  $x$  mit  $r$  verknüpft durch die Beziehung

$$r = \frac{1}{4} \left( \frac{9 \pi^2}{2 Z} \right)^{1/2} a_0 x, \quad (8)$$

wobei  $a_0$  den kleinsten Bohrschen Wasserstoffradius darstellt.  $c_n$  und  $b_n$  sind Konstante, welche von der Ordnungszahl  $Z$  abhängen. Betreffs der Genauigkeit der Darstellung (7) sei auf die Arbeiten von Ruark, Holtzman und insbesondere auf die von Byatt verwiesen.

### Resultate

Der elastische differentielle Streuquerschnitt  $I_0(\Theta)$  ist wie bekannt in der ersten Bornschen Näherung gegeben durch<sup>7)</sup>

$$I_0(\Theta) = \left[ \frac{3^{1/2} \hbar^2 Z^{1/2}}{2^{17/4} \pi^{5/2} e^2 m \mu_0} \int_0^\infty (Z_p/Z) \sin \mu x dx \right]^2,$$

wo

$$\mu = 3^{1/2} \hbar v \sin \frac{1}{2} (\Theta) / (2^{7/2} \pi^{1/2} e^2 Z^{1/2}). \quad (9)$$

$\hbar$  ist das Plancksche Wirkungsquantum,  $v$  bedeutet die Geschwindigkeit des Elektrons. In Tab. 1 sind die verschiedenen Näherungen für die reduzierten effektiven Kernladungen der neutralen Atome  $Z_p/Z$  zusammengestellt.

Tabelle 1  
Analytische Näherungen für  $Z_p/Z$

Atom	$Z_p/Z$	$Z_p/Z$
He	$e^{-1.60x}$	$1.25 e^{-1.75x} - 0.25 e^{-3.845x}$ (Byatt***)
Be		$e^{-0.574x} - 0.48 e^{-1.081x} + 0.48 e^{-3.06x}$ (Byatt***)
C		$1.25 e^{-0.828x} - 0.44 e^{-1.41x} + 0.19 e^{-4.29x}$ (Byatt***)
N	$e^{-0.95x}$	$1.20 e^{-0.904x} - 0.32 e^{-1.43x} + 0.12 e^{-9.65x}$ (Byatt***)
O	$e^{-0.919x}$	$1.25 e^{-0.991x} + 0.35 e^{-1.63x} + 0.10 e^{-18.3x}$ (Byatt***)
F	$e^{-0.967x}$	
Ne	$e^{-0.978x}$	
A		$[0.84 e^{-0.986x} - 0.24 e^{-1.096x} + 0.40 e^{-3.95x}] *$
		$0.659 e^{-0.574x} + 0.341 e^{-2.77x}$ (Ruark**)
K		$0.124 e^{-0.514x} + 0.68 e^{-0.765x} + 0.196 e^{-2.80x}$
Ca		$0.20 e^{-0.195x} + 0.56 e^{-0.770x} + 0.24 e^{-3.08x}$ (Byatt***)
Cr	$e^{-0.721x}$	$e^{-0.731x} - 0.20 e^{-1.26x} + 0.20 e^{-3.70x}$ (Byatt***)
Fe		$0.25 e^{-0.335x} + 0.56 e^{-0.828x} + 0.19 e^{-3.76x}$ (Byatt***)
Zn		$0.22 e^{-0.319x} + 0.78 e^{-1.081x}$ (Byatt***)
Ge		$0.22 e^{-0.263x} + 0.78 e^{-1.165x}$ (Byatt***)
As		$0.295 e^{-0.387x} + 0.705 e^{-1.295x}$ (Byatt***)
Br		$0.360 e^{-0.366x} + 0.640 e^{-1.483x}$ (Byatt***)
Kr		$[0.335 e^{-0.290x} + 0.60 e^{-1.03x} + 0.065 e^{-7x}] *$
		$0.415 e^{-0.378x} + 0.51 e^{-1.48x} + 0.075 e^{-7x}$ (Byatt***)
W		$0.19 e^{-2.16x} + 0.72 e^{-0.970x} + 0.09 e^{-15x}$ (Byatt***)
Hg		$0.19 e^{-0.257x} + 0.56 e^{-0.779x} + 0.25 e^{-3.16x}$ (Byatt***)
$\Phi(x)$		$0.35 e^{-0.3x} + 0.55 e^{-1.2x} + 0.1 e^{-6x}$

\* Dieser Ausdruck enthält die Polarisationskorrektur. — \*\* siehe<sup>4)</sup>. — \*\*\* siehe<sup>5)</sup>.

<sup>7)</sup> N. F. Mott und H. S. Massey, The Theory of Atomic Collisions. Oxford 1950, S. 189.

Setzt man den Ausdruck (7) für  $Z_p/Z$  in die Gl. (9) für den elastischen differentiellen Streuquerschnitt  $I_0(\Theta)$  ein, so bekommt man

$$I_0(\Theta) = g^2 \left[ \frac{c_1}{a_1^2 + \mu^2} + \frac{c_2}{a_2^2 + \mu^2} + \frac{c_3}{a_3^2 + \mu^2} \right]^2, \quad (10)$$

mit

$$g = 3^{1/4} \hbar^2 Z^{1/4} / 2^{17/4} \pi^{3/4} e^2 m.$$

Bei dieser Berechnung wurde eine dreigliedrige Exponentialfunktion für  $Z_p/Z$  angenommen. Nimmt man eine eingleidrige Exponentialfunktion ( $n = 1$ ) für  $Z_p/Z$ , so ist  $c_2 = c_3 = 0$  und  $c_1 = 1$  in Gl. (10) zu setzen. Verwendet man eine zweigliedrige Exponentialfunktion ( $n = 2$ ) für  $Z_p/Z$ , so ist  $c_2 = 0$  zu wählen. Die Tab. 2 enthält verschiedene numerische Werte für den elastischen differentiellen Streuquerschnitt  $I_0(\Theta)$  in Einheiten  $10^{-18} \text{ cm}^2$ . Als Ordnungszahl wurde  $Z = 8$  genommen; für  $Z_p/Z$  wurde erstens eine eingleidrige und zweitens eine dreigliedrige Exponentialfunktion verwendet. Die eben erwähnten ( $Z_p/Z$ )-Näherungen sind in Tab. 1 zu finden.

In Tab. 2 sind weitere numerische Werte angegeben für den elastischen differentiellen Streuquerschnitt  $I_0(\Theta)$  für die Ordnungszahl  $Z = 19$  bei Benutzung der Ruarkschen Formel für  $Z_p/Z$  (s. Tab. 1) bzw. der dreigliedrigen Exponentialfunktion für  $Z_p/Z$  (s. Tab. 1) dieser Ausdruck enthält eine Polarisationskorrektur<sup>8)</sup>. Weiter sind in Tab. 2 die exakten numerischen Werte für den elastischen differentiellen Streuquerschnitt (in denselben Einheiten) eingetragen.

Tab. 2 zeigt, daß die Resultate mit der zweigliedrigen Exponentialfunktion für  $Z_p/Z$  eine bessere Annäherung an die numerisch berechneten  $I_0(\Theta)$ -Werte zeigen als die mit der eingleidrigen Exponentialfunktion für  $Z_p/Z$  erhaltenen. Aus Tab. 2 ist weiter zu ersehen, daß die analytische Näherung für  $Z_p/Z$  mit Polarisationskorrektur bessere Resultate ergibt als die ohne Polarisationskorrektur.

Setzt man den Ausdruck (10) für den elastischen differentiellen Streuquerschnitt  $I_0(\Theta)$ , in unsere Formel (2) für den elastischen Gesamtstreuquerschnitt  $Q_0$  ein, so erhalten wir für  $Q_0$

$$Q_0 = 4 \pi g^2 \left[ \frac{c_1^2}{a_1^2 (a_1^2 + k^2)} + \frac{c_2^2}{a_2^2 (a_2^2 + k^2)} + \frac{c_3^2}{a_3^2 (a_3^2 + k^2)} + \frac{2 c_2 c_1}{k^2 (a_2^2 - a_1^2)} \ln \frac{a_1^2 (a_2^2 + k^2)}{a_1^2 (a_2^2 + k^2)} \right. \\ \left. + \frac{2 c_3 c_1}{k^2 (a_3^2 - a_1^2)} \ln \frac{a_1^2 (a_3^2 + k^2)}{a_1^2 (a_3^2 + k^2)} + \frac{2 c_3 c_2}{k^2 (a_3^2 - a_2^2)} \ln \frac{a_2^2 (a_3^2 + k^2)}{a_2^2 (a_3^2 + k^2)} \right]. \quad (11)$$

Bei Wahl einer eingleidrigen Exponentialfunktion für  $Z_p/Z$  müssen wir  $c_2 = c_3 = 0$  und  $c_1 = 1$  setzen und im Falle der zweigliedrigen Exponentialfunktion gilt  $c_3 = 0$ , so daß stets  $\sum_n c_n = 1$ .

Die Größe  $k$  in Formel (11) bedeutet:

$$k = \frac{3^{1/4} \hbar v}{2^{1/4} \pi^{1/4} Z^{1/4}}. \quad (12)$$

Die Tab. 3 enthält verschiedene numerische Werte für den elastischen Gesamtstreuquerschnitt  $Q_0$  nach Gl. (11) für die Ordnungszahl  $Z = 2$ .

<sup>8)</sup> siehe <sup>7)</sup>.

Tabelle 2  
Vergleich des differentiellen Streuquerschnittes  $I_0(\Theta)$  für einige  $(Z_p/Z)$ -Näherungen mit den numerischen Werten für  $I_0(\Theta)$ . Einheit  $10^{-18} \text{ cm}^2$ 

	$\sin \frac{1}{2} \Theta \cdot 10^{-8}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1
Numerische Werte für $I_0(\Theta)$												
$I_0(\Theta)$ -Werte für eingliedrige $Z_p/Z$	458,46	257,53	117,73	57,73	30,56	16,70	9,74	5,89	3,79	2,55	1,75	
$I_0(\Theta)$ -Werte für dreigliedrige $Z_p/Z$	317,44	194,00	104,32	55,31	30,77	17,52	10,62	6,74	4,45	3,04	2,14	
Numerische Werte für $I_0(\Theta)$	299,07	187,15	101,73	53,65	29,03	16,45	9,80	6,12	3,99	2,70	1,88	
$I_0(\Theta)$ -Werte für dreigliedrige $Z_p/Z$ (Polarisationskorrektur)	2739,44	1030,12	401,86	191,31	93,96	52,64	32,83	21,60	15,17	10,92	8,04	
$A(Z=18)$	2078,60	1012,26	442,77	231,52	101,68	55,77	33,07	20,92	13,94	9,69	6,27	
$I_0(\Theta)$ -Werte für zweigliedrige $Z_p/Z$ (Ruarck)	1495,25	778,71	368,40	181,59	96,71	61,54	37,02	22,14	15,01	10,56	7,64	

Tabelle 3  
Der Gesamtstreuquerschnitt  $Q_0$  für verschiedene Näherungen  $Z_p/Z$  nach Tab. 1.  $Q_0$  ist in Einheiten von  $\pi a_0^2$  als Funktion von  $\sqrt{V}$  und  $V$  in Volt angegeben

	$\sqrt{V}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20
$Q_0/\pi a_0^2$	$(Z=2, Z_p/Z \text{ eingliedrig})$	2,26	1,94	1,58	1,26	0,99	0,78	0,63	0,51	0,43	0,36	0,17	0,10
	$(Z=2, Z_p/Z \text{ zweigliedrig})$	2,28	2,00	1,67	1,37	1,07	0,86	0,69	0,57	0,47	0,39	0,19	0,11
	$(Z=10, Z_p/Z \text{ eingliedrig})$	47,42	41,30	34,00	27,26	21,71	17,39	14,08	11,65	9,59	8,06	3,94	2,29

Tabelle 4  
Der Diffusionsstreuquerschnitt  $Q_d$  für verschiedene Näherungen  $Z_p/Z$  nach Tab. 1.  $Q_d$  ist in Einheiten  $\pi a_0^2$  als Funktion von  $\sqrt{V}$  und  $V$  in Volt angegeben

	$\sqrt{V}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20
$Q_d/\pi a_0^2$	$(Z=2, Z_p/Z \text{ eingliedrig})$	2,14	1,81	1,36	0,98	0,70	0,50	0,37	0,27	0,20	0,16	0,050	0,020
	$(Z=10, Z_p/Z \text{ eingliedrig})$	46,61	38,71	29,68	21,83	15,83	11,50	8,44	6,29	4,75	3,65	1,18	0,49

Für  $Z_p/Z$  wurden erstens eine eingliedrige und zweitens zweigliedrige Exponentialfunktionen (nach Tab. 1) eingesetzt.  $Q_0$  ist in Einheiten  $\pi a_0^2$  als Funktion von  $\sqrt{V}$ , mit  $V$  in Volt, angegeben.

Die Tab. 3 zeigt, daß der elastische Gesamtstreuquerschnitt  $Q_0$  nur unbedeutend davon abhängt, ob man mit einer eingliedrigen oder zweigliedrigen Exponentialfunktion für  $Z_p/Z$  rechnet. Angaben über den elastischen Gesamtstreuquerschnitt  $Q_0$  fehlen hier, weil solche in der bisherigen Literatur nicht existieren. Mit Hilfe der Gl. (10) für den elastischen differentiellen Streuquerschnitt  $I_0(\Theta)$  und der Gl. (4) für den Diffusionsstreuquerschnitt  $Q_d$  bekommen wir bei Verwendung der dreigliedrigen Exponentialfunktion für  $Z_p/Z$  [s. Gl. (7)] folgende Formel für  $Q_d$ :

$$Q_d = Q_0 + 4\pi g^2 \left[ \frac{c_1^2}{k^2} \ln \frac{a_1^2 + k^2}{a_1^2} - \frac{2a_1^2 + k^2}{a_1^2(a_1^2 + k^2)} \right] + \frac{c_2^2}{k^2} \left( \frac{2}{k^2} \ln \frac{a_2^2 + k^2}{a_2^2} - \frac{2a_2^2 + k^2}{a_2^2(a_2^2 + k^2)} \right) + \frac{c_3^2}{k^2} \left( \frac{2}{k^2} \ln \frac{a_3^2 + k^2}{a_3^2} - \frac{2a_3^2 + k^2}{a_3^2(a_3^2 + k^2)} \right) + \frac{8\pi g^2 c_2 c_1}{k^2(a_2^2 - a_1^2)} \cdot \left[ \left( 1 + \frac{2a_2^2}{k^2} \right) \ln \frac{a_2^2 + k^2}{a_2^2} - \left( 1 + \frac{2a_1^2}{k^2} \right) \ln \frac{a_1^2 + k^2}{a_1^2} \right] + \frac{8\pi g^2 c_3 c_2}{k^2(a_3^2 - a_2^2)} \cdot \left[ \left( 1 + \frac{2a_3^2}{k^2} \right) \ln \frac{a_3^2 + k^2}{a_3^2} - \left( 1 + \frac{2a_2^2}{k^2} \right) \ln \frac{a_2^2 + k^2}{a_2^2} \right] + \frac{8\pi g^2 c_3 c_1}{k^2(a_3^2 - a_1^2)} \cdot \left[ \left( 1 + \frac{2a_3^2}{k^2} \right) \ln \frac{a_3^2 + k^2}{a_3^2} - \left( 1 + \frac{2a_1^2}{k^2} \right) \ln \frac{a_1^2 + k^2}{a_1^2} \right]. \quad (13)$$

Benutzt man für  $Z_p/Z$  eine eingliedrige Exponentialfunktion, so ist  $c_2 = c_3 = 0$ ,  $c_1 = 1$ , und für eine zweigliedrige Exponentialfunktion wäre  $c_3 = 0$  zu setzen. Im Falle einer eingliedrigen Exponentialfunktion für  $Z_p/Z$  vereinfacht sich Gl. (13) wie folgt

$$Q_d = \frac{8\pi g^2}{k^2} \left[ \frac{1}{k^2} \ln \left( 1 + \frac{k^2}{a^2} \right) - \frac{1}{a^2 + k^2} \right]. \quad (14)$$

Tab. 4 zeigt verschiedene numerische Werte (für die Ordnungszahlen  $Z = 2$  und  $Z = 10$ ) für den Diffusionsstreuquerschnitt  $Q_d$  wie er durch obige Gl. (14) gegeben ist.  $Q_d$  ist wieder in Einheiten  $\pi a_0^2$  als Funktion von  $\sqrt{V}$ , mit  $V$  in Volt, angegeben.

Numerische Werte für  $Q_d$  wurden nicht angegeben, weil solche bisher nicht bekannt sind. In späteren Arbeiten ist beabsichtigt, eine entsprechende Formel für den Diffusionsstreuquerschnitt für das Thomas-Fermi-Feld, ferner die relativistische Korrektur für den elastischen Gesamtstreuquerschnitt  $Q_0$  für das Thomas-Fermi-Feld<sup>9)</sup> und das Hartreesche Feld anzugeben. Die Tab. 3 und 4 zeigen, daß der elastische Gesamtstreuquerschnitt  $Q_0$  und der Diffusionsstreuquerschnitt  $Q_d$  monotonen Funktionen der Stoßgeschwindigkeit der Elektronen sind.

<sup>9)</sup> M. Majewski u. T. Tietz, Physic. Rev. **108**, 193 (1957).

Łódź (Polen), Universität Łódź, Institut der Theoretischen Physik.

Bei der Redaktion eingegangen am 9. August 1958.

edrige  
 $a_0^2$  als

unbe-  
drigen  
n Ge-  
teratur  
siellen  
itt  $Q_d$   
n für

$+ k^2$   
 $+ k^2$ )

(13)

o ist  
wäre  
n für

(14)

hlen  
obige  
mit

sherr  
ende  
feld,  
uer-  
anzu-  
nitt  
toß-

## Die Depolarisation der Natrium-Resonanzfluoreszenz

Von W. Ermisch und R. Seiwert

Mit 3 Abbildungen

### Inhaltsübersicht

Die Polarisation der Resonanzfluoreszenz wurde bei verschiedenen Dampfdrucken des Natriums im Bereich von  $1 \cdot 10^{-7}$  bis  $1 \cdot 10^{-4}$  Torr und Magnetfeldstärken zwischen 0 und 300 Gauß untersucht. Das eingestrahlte NaD-Licht war linear polarisiert, und zwar parallel zu  $\mathfrak{H}$ . Die Abnahme des Polarisationsgrades, die bereits bei etwa  $1 \cdot 10^{10}$  Na-Atomen pro  $\text{cm}^3$  einsetzte, wird bei den sehr niedrigen Dampfdrucken als Effekt der Strahlungsdiffusion gedeutet.

### 1. Einführung

Von 1923 bis 1934 wurden verschiedene Messungen<sup>1-9)</sup> des Polarisationsgrades der Natrium-Resonanzfluoreszenz durchgeführt. Ihre Ergebnisse sind der Übersicht halber in der Abb. 1 dargestellt, soweit die Anregung mit linear polarisiertem Licht erfolgte. (Alle Meßwerte wurden aus Gründen der Einheitlichkeit auf den Polarisationsgrad der  $D_2$ -Linie umgerechnet.) Die Meßpunkte lassen eine Abnahme des Polarisationsgrades mit wachsender Teilchendichte erkennen; doch erscheint es nicht gesichert, ob diese tatsächlich bereits bei sehr geringen Teilchendichten beginnt. Die von Datta<sup>5)</sup> publizierte geschlossene Meßkurve könnte als Bestätigung dafür angesehen werden, wenn nicht die angegebenen Polarisationsgrade im Widerspruch zu allen anderen Untersuchungsergebnissen ständen und über dem Wert von 18,97 % lägen, der theoretisch maximal unter Berücksichtigung der Hyperfeinstruktur (bei Breitlinienanregung) zu erwarten ist. Die übrigen Meßwerte der verschiedenen Autoren<sup>2,4,6-10)</sup> für sehr kleine Teilchendichten stimmen innerhalb der abgeschätzten Fehlergrenzen mit dem theoretischen Wert des Polarisationsgrades überein, so daß die Abnahme des Polarisationsgrades, die aus Abb. 1 hervorgeht, noch zufällig und vorgetäuscht sein könnte. Hierfür

- 1) R. W. Wood u. A. Ellett, Proc. Roy. Soc. London (A) **108**, 396 (1923).
- 2) E. Gaviola u. P. Pringsheim, Z. Physik **25**, 367 (1924).
- 3) R. W. Wood u. A. Ellett, Physic. Rev. **24**, 243 (1924).
- 4) A. Ellett, J. Opt. Soc. Amer. **10**, 427 (1925).
- 5) G. L. Datta, Z. Physik **37**, 625 (1926).
- 6) A. Ellett, Physic. Rev. **35**, 588 (1930).
- 7) N. P. Heydenburg, L. Lerrick u. A. Ellett, Physic. Rev. **40**, 1041 (1932).
- 8) N. P. Heydenburg u. A. Ellett, Physic. Rev. **44**, 326 (1933).
- 9) L. Lerrick, Physic. Rev. **46**, 581 (1934).
- 10) W. Ermisch u. R. Seiwert, Exp. Techn. Physik **3**, (1955), Sonderheft „Spektroskopie“ S. 52ff.

spricht die Behauptung von Lerrick<sup>9</sup>), daß der Polarisationsgrad im Temperaturbereich von 85° bis 120° C sich nicht ändert und noch bis 135° C keine nennenswerte Abnahme zeigt. Es muß jedoch bezweifelt werden, daß die Temperaturangaben für den am Beobachtungsort vorhandenen Dampfdruck zutreffen, da bei Lerrick's Versuchen das Resonanzgefäß über eine Kühl-

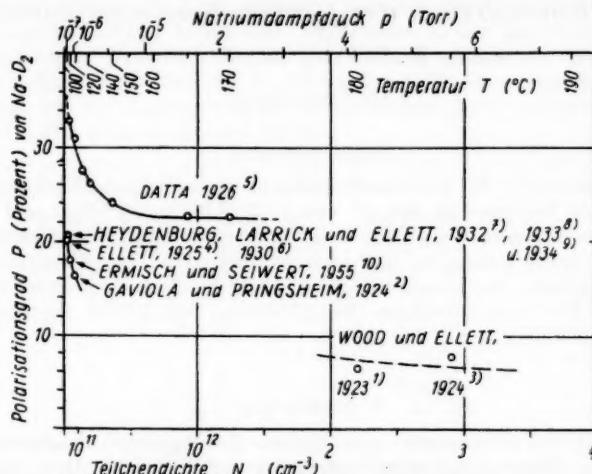


Abb. 1. Zusammenfassung von früheren Meßergebnissen mehrerer Autoren<sup>1-10</sup>) für den Polarisationsgrad bei verschiedenen Teilchendichten

falle an die ununterbrochen laufende Quecksilberdiffusionspumpe angeschlossen war. Untersuchungen von Hanle<sup>11</sup>) mit einer Anregung durch zirkular polarisiertes Licht ergaben wiederum eine starke Abnahme des Polarisationsgrades mit zunehmender Teilchendichte bereits bei sehr niedrigen Dampfdrucken.

Die Herabsetzung des Polarisationsgrades beim Anwachsen der Teilchendichte wurde der Wirkung depolarisierender Stöße zugeschrieben, bei denen Übergänge zwischen den Zeeman-Niveaus stattfinden. Die Verfasser haben bereits im Anschluß an ihre Messungen des Polarisationsgrades bei linear polarisierter Anregung eines Natrium-Atomstrahls<sup>10</sup>), auf die später noch kurz eingegangen wird, darauf hingewiesen, daß die erwähnte Erklärung der Depolarisation in Zweifel zu ziehen ist, wenn der Abfall des Polarisationsgrades schon bei Teilchendichten von  $10^{10}$  Natrium-Atomen/cm<sup>3</sup> beginnt. Dann würden nämlich die Querschnitte der depolarisierenden Stöße in der Größenordnung von  $10^{-9}$  cm<sup>2</sup> liegen und damit wesentlich größer sein, als das theoretisch zu erwarten wäre. Es erhebt sich deshalb die Frage: Welche Abhängigkeit des Polarisationsgrades von der Teilchendichte tritt tatsächlich auf und wie kann sie erklärt werden?

Es liegt nahe, dabei die Messungen des Polarisationsgrades bei verschiedenen Magnetfeldstärken und nicht nur bei  $H = 0$  durchzuführen. Denn es

<sup>11</sup>) W. Hanle, Z. Physik 41, 164 (1927).

Tem-  
keine  
3 die  
druck  
Kühl-  
den  
nge-  
urch  
des  
ied-  
nen  
ben  
ear  
urz  
De-  
des  
ann  
en-  
pre-  
keit  
wie  
nie-  
es

muß erwartet werden, daß die Zeeman-Komponenten mit steigendem Magnetfeld immer weiter auseinandergezogen werden und daß dadurch die Depolarisation herabgesetzt wird, wenn diese durch Stöße bewirkt wird.

Sowohl Datta<sup>5)</sup> als auch Hanle<sup>11)</sup> haben bei ihren Versuchen die Magnetfeldstärke variiert. Läßt man die anscheinend fragwürdigen Meßwerte von Datta außer acht, so muß auf die Hanleschen Messungen noch näher eingegangen werden. Hanle und Larché<sup>12)</sup> haben in einer 1933 erschienenen Veröffentlichung aus den Ergebnissen für die zirkular polarisierte Natrium-Resonanzfluoreszenz Querschnitte für die depolarisierenden Stöße und die zugehörige Resonanzabweichung zu berechnen versucht, die jedoch aus folgenden Gründen nicht zutreffen können.

1. Anstatt von dem den Versuchsbedingungen entsprechenden stationären Zustand auszugehen, haben die Autoren einen für den nichtstationären Fall gültigen Ansatz verwendet und es versäumt, die dann noch notwendige Mitteilung über die Zahl der angeregten Atome in der Zeit  $t$  von 0 bis  $\infty$  vorzunehmen.

2. Als Hanle seine Messungen durchgeführt hat, war die Hyperfeinstruktur noch unbekannt; deshalb erwartete er bei seinen Versuchsbedingungen (Anregung mit zirkular polarisiertem Licht) einen Polarisationsgrad von 100 %. Wenn man die Hyperfeinstruktur in Betracht zieht, ergibt sich der theoretische Wert von 37,50 % für die  $D_1$ -Linie und von 58,55 % für die  $D_2$ -Linie. Der resultierende Polarisationsgrad bei der Einstrahlung beider Linien richtet sich nach dem Intensitätsverhältnis dieser Linien und sollte etwa bei 50 % liegen. Damit befinden sich die Hanleschen Meßergebnisse im Einklang, wenn man von der Bemerkung absieht, daß es bei einem sehr weiten Ofen und ganz klaren Resonanzgefäß gelungen sei, in einem Fall einen Polarisationsgrad von über 60 % zu erhalten. Der Anstieg des Polarisationsgrades mit wachsendem Magnetfeld (bei kleinen Feldern), der von Hanle und Larché mit Hilfe der Abnahme der depolarisierenden Stöße gedeutet wurde, ist durch den Übergang von der Zeeman-Aufspaltung der Hyperfeinstruktur in die Paschen-Back-Aufspaltung bedingt. Lerrick<sup>9)</sup> hat diesen Einfluß des Übergangs auf den Polarisationsgrad der NaD-Linien im Fall der linear polarisierten Einstrahlung unter Berücksichtigung der endlichen Termbreite ermittelt. Es sei noch in diesem Zusammenhang darauf hingewiesen, daß Ellett und Heydenburg<sup>13)</sup> am Beispiel des Na-Dubletts bei 3303 Å theoretisch gezeigt haben, wie sich die Linienform der zur Anregung benutzten Lichtquelle auf den Polarisationsgrad auswirkt.

3. Hanle und Larché glaubten nachgewiesen zu haben, daß die Stoßquerschnitte  $q$  von der Resonanzabweichung  $\Delta E$  in folgender Form abhängen:

$$q \sim \Delta E^{-3/2}.$$

Diese Beziehung wird von der Theorie im Fall der Dipol-Dipol-Wechselwirkung gefordert. Nun sind aber nach dem unter 1. Erwähnten die Querschnitte nicht in zutreffender Weise ermittelt worden, und außerdem ist nicht die Hyperfeinstruktur bei der Bestimmung der Resonanzabweichung berücksichtigt worden. Schließlich ist noch einzuwenden, daß eine Gerade  $\lg q = a \lg \Delta E$  nur dann eindeutig durch die von Hanle und Larché umgerechneten

<sup>12)</sup> W. Hanle u. K. Larché, Z. Physik **85**, 548 (1933).

<sup>13)</sup> A. Ellett u. N. P. Heydenburg, Physic. Rev. **46**, 583 (1934).

Meßpunkte legen läßt, wenn noch ein Meßpunkt für  $\Delta E = 0,002$  eV hinzugenommen wird. Für den zugehörigen Querschnitt der Stöße mit Übergängen von Natrium-Atomen zwischen den beiden  $3^2P$ -Zuständen haben die Autoren den Meßwert von Lochte-Holtgreven<sup>14)</sup> genommen, bei dem die Strahlungsdiffusion noch nicht berücksichtigt ist. Wie einer der Verf.<sup>15)</sup> gezeigt hat, besitzt der Querschnitt tatsächlich einen wesentlich kleineren Wert.

Die vorangegangene Übersicht über die früheren Experimente zur Polarisation der Natrium-Resonanzfluoreszenz zeigt deutlich, daß Messungen erforderlich waren, um die Abhängigkeit des Polarisationsgrades von der Teilchendichte zu klären.

## 2. Experimentelles

Die Küvette, an der die Untersuchungen durchgeführt wurden, bestand aus einem Hartglasrohr von 17 mm Durchmesser und 15 cm Länge. Der mittlere Teil (etwa 4 cm) war durch ein Stück KPG-Rohr von quadratischem Querschnitt ( $17 \times 17$  mm<sup>2</sup>) des VEB Schott-Jena ersetzt. In die Küvette wurde Natrium hineindestilliert, das bereits durch eine größere Zahl von Destillationen gereinigt worden war; dann wurde sie abgeschmolzen und das Vakuum, auf dessen Güte schon vorher sorgfältig geachtet worden war, nochmals mit einem Funkeninduktork überprüft.

Der doppelwandige, an beiden Enden verschlossene Rohrofen zur Erwärmung der Küvette besaß eine bifilare Wicklung mit einer Mittelanzapfung; er stand senkrecht und hatte vier Quarzglasfenster (1,5 cm Durchmesser) in der Höhe, in der sich der mittlere Teil der Küvette befand. Zur Vermeidung von Streulicht war dieser mit einer schwarzen Maske versehen, die zwei rechteckige Öffnungen von  $1 \times 3$  cm<sup>2</sup> für die Einstrahlung und Beobachtung besaß; außerdem waren an drei Kanten der Küvette noch geschwärzte Flügel angebracht. Schließlich konnte die Küvette noch innerhalb des Ofens nachträglich so verschoben und gedreht werden, daß das Streulicht auf einen möglichst kleinen Wert herabgesetzt wurde.

Um das Niederschlagen von Natrium an den Glaswänden, durch die einstrahlte und beobachtet wurde, zu verhindern, wurde die Temperatur dort etwas höher gehalten. An drei Stellen der Küvette waren Kupfer-Konstanten-Thermoelemente zur genauen Bestimmung der Temperatur befestigt.

Durch zwei wassergekühlte Spulen wurde ein Magnetfeld (bis zu 275 Gauß) von hinreichender Homogenität innerhalb des Küvettenteils erzeugt, in dem sich die Vorgänge der Resonanzfluoreszenz abspielten.

Die Anregung des Natriumdampfes in der Küvette erfolgte mit einer Natrium-Spektrallampe NAE 24 des VEB BGW<sup>16)</sup>. Die Speisespannung dieser Lampe wurde mit Hilfe eines magnetischen Stabilisators konstant gehalten. Das Intensitätsverhältnis der beiden *D*-Linien  $q = I_{D1}/I_{D2}$  wurde

<sup>14)</sup> W. Lochte-Holtgreven, Z. Physik **47**, 362 (1928).

<sup>15)</sup> R. Seiwert, Ann. Physik (6) **18**, 54 (1956).

<sup>16)</sup> U. Kopeć, Elektrotechnik **8**, 318 (1954).

zu 1:1,2 bestimmt<sup>17)</sup>). Der Kolben der Spektrallampe wurde mit einer Metallfolie umgeben, die nur eine Öffnung von 2 mm Durchmesser besaß. Dann war der Öffnungswinkel des Strahlenbündels, das durch den Polarisationsfilter ging und die Anregung des Dampfes bewirkte, kleiner als 4 Grad; bei diesem Winkel ist nach den Angaben von Gaviola und Pringsheim<sup>18)</sup> noch keine nennenswerte Herabsetzung des Polarisationsgrades zu erwarten.

Die Fluoreszenzintensität wurde in einer Richtung senkrecht zum anregenden Strahl und senkrecht zum Magnetfeld mittels eines Photokathoden-Sekundärelektronen-Vervielfachers vom Typ RCA 1 P 28 gemessen. Auch hierbei wurde darauf geachtet, daß alle Lichtstrahlen, die aus der Kuvette kamen und die Blende vor dem Multiplier passieren konnten, den als Analyzer dienenden Polarisationsfilter wiederum mit einem Öffnungswinkel von weniger als 4 Grad durchsetzen. Zur Ausschaltung vom Empfindlichkeitschwankungen des Vervielfachers konnte zwischen jeder Messung das Licht eines mit einem Akkumulator gespeisten Lämpchens, das durch Graufilter in seiner Intensität abgeschwächt und aus dem alle anderen Frequenzen als die in der Umgebung der D-Linien herausgefiltert wurden, über zwei Spiegel auf die Photokathode des Vervielfachers als Intensitätsnormal geworfen werden.

Jede Meßreihe wurde bei einer anderen Temperatur der Kuvette ausgeführt. Der in der Kuvette herrschende Natriumdampfdruck wurde nach einer Formel von Thiele<sup>19)</sup>

$$\lg p = - \frac{26249}{4,573} \cdot \frac{1}{T} - 1,178 \lg T + 11,413$$

ermittelt. Das Temperaturgefälle in der Kuvette wurde berücksichtigt. In jeder Meßreihe wurde bei den verschiedenen Magnetfeldstärken die Intensität des parallel zum Magnetfeld polarisierten Anteils und des senkrecht dazu polarisierten Anteils des Fluoreszenzlichtes gemessen. Zwischen je zwei Messungen wurde unter sonst gleichen Bedingungen eine Messung ohne Magnetfeld eingefügt.

Vor Beginn und nach Beendigung jeder Meßreihe wurde bei kaltem Ofen das Streulicht ermittelt, und zwar die Intensität des parallel und die des senkrecht zum Magnetfeld polarisierten Anteils. Zur Kontrolle wurden wiederum Vergleichsmessungen mit der als Intensitätsnormal dienenden Lichtquelle durchgeführt.

### 3. Meßergebnisse

Der Polarisationsgrad wurde bei 7 verschiedenen Temperaturen der Kuvette bestimmt. Die Ergebnisse dieser Messungen sind der Abb. 2 zu entnehmen.

<sup>17)</sup> Zunächst sollte eine Natrium-Houtermans-Lampe wegen deren größerer Selbstumkehrfreiheit benutzt werden. Doch mußte davon nach mehrmaliger Neuanfertigung Abstand genommen werden, da die Lampen kurz nach der Inbetriebnahme sprangen. Dafür kommen zwei Gründe in Betracht. 1. Bei der Herstellung der etwas komplizierteren Formen dieser Lampe aus dem schwerer zu verarbeitenden natriumfesten Überfangglas können sich Spannungen ausgebildet haben, die sich durch das Tempern nicht völlig befreien ließen. 2. Durch die Einengung der Entladung können offenbar höhere Wärmelastungen der Wände und an den seitlichen Grenzen der Entladung stärkere Temperaturgradienten aufgetreten sein, die das natriumfeste Glas nicht aushält. — Herrn Ihln (BGW) möchten wir für die Herstellung der Natrium-Houtermans-Lampen in seiner Abteilung vielmals danken.

<sup>18)</sup> E. Gaviola u. P. Pringsheim, Z. Physik 34, 1 (1925); 39, 75 (1926).

<sup>19)</sup> E. Thiele, Ann. Physik 14, 937 (1932).

In ihr ist der Polarisationsgrad über die Teilchendichte  $N$  des Natrium-dampfes in der Küvette aufgetragen. Außerdem befindet sich auf der Abszisse noch eine Skala des zugehörigen Natriumdampfdruckes  $p$  und der absoluten Temperatur  $T$ . Es zeigt sich deutlich, daß die Depolarisation der Resonanz-fluoreszenz bereits bei sehr kleinen Teilchendichten beginnt. Alle Kurven fallen zuerst steil und mit wachsendem  $N$  nur noch schwächer ab.

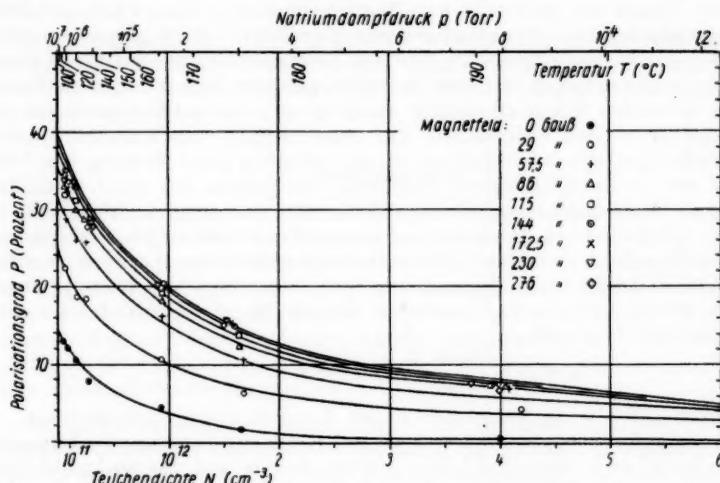


Abb. 2. Abhängigkeit des Polarisationsgrades von der Teilchendichte bei verschiedenen Magnetfeldstärken

Zur Genauigkeit der Messungen ist folgendes zu sagen: Bei den geringen Teilchendichten kam die Fluoreszenzintensität in die Größenordnung der Streulichtintensität. Diese war bei den verwendeten Küvetten durch die nachträgliche Justierung im Ofen nicht mehr weiter zu senken. Das benutzte KPG-Rohr mit quadratischem Querschnitt hatte zwar plane Seitenwände, jedoch war das Glas selbst nicht vollkommen optisch einwandfrei. (Bei den zuerst benutzten Küvetten aus natriumfestem Glas mit kreisförmigem Querschnitt war der Streulichtanteil durch Lichtbrechung und Lichteitung wesentlich größer.) Außerdem trat bei den höchsten Temperaturen noch eine leichte Bräunung des Glases auf. Das Streulicht blieb während eines Versuchs, der sich jeweils über mehrere Stunden hinzog, nie ganz konstant. Gemessen wurde aber nur der Anfangs- und Endwert. Daher sind die Abweichungen von den interpolierten Werten möglich, die nicht miterfaßt werden können. Bei der Berechnung des Polarisationsgrades macht sich dann aber eine solche Abweichung bemerkbar. Um die aus den aufgeführten Gründen auftretende Ungenauigkeit weitgehend auszugleichen, wurden für sehr geringe Teilchendichten etwa dreimal soviel Messungen durchgeführt als bei den Temperaturen über 160° C und die Ergebnisse gemittelt. Die beiden Meßreihen zwischen 160° und 180° C besitzen die engsten Fehlergrenzen. Oberhalb von 180° C nimmt die Genauigkeit der Messungen wieder ab, weil in diesem Gebiet bereits geringe Schwankungen der Küvetten-temperatur  $T$  viel größere Änderungen der Teilchendichte  $N$  als bei niedrigen Temperaturen bewirken. Die Punkte bei  $N = 4 \cdot 10^{12}$  sind Mittelwerte aus zwei Meßreihen.

In Abb. 3 sind die in Abb. 2 enthaltenen Kurven umgezeichnet worden; dabei ist der Polarisationsgrad als Funktion der Magnetfeldstärke aufgetragen worden. Der Parameter ist hier die Teilchendichte  $N$ .

Der Polarisationsgrad  $P$  steigt bis etwa 100 Gauß stark<sup>20)</sup>, dann immer schwächer an. Von etwa 180 Gauß an ändert er sich bis zur Grenze des bei den Untersuchungen erfaßten Bereichs kaum noch. In diesem Intervall beträgt der für  $N \rightarrow 0$  extrapolierte Polarisationsgrad 40 %. Für ein Intensitätsverhältnis der beiden  $D$ -Linien  $q = 1:1,2$  sind maximal 45 % (bei voll-

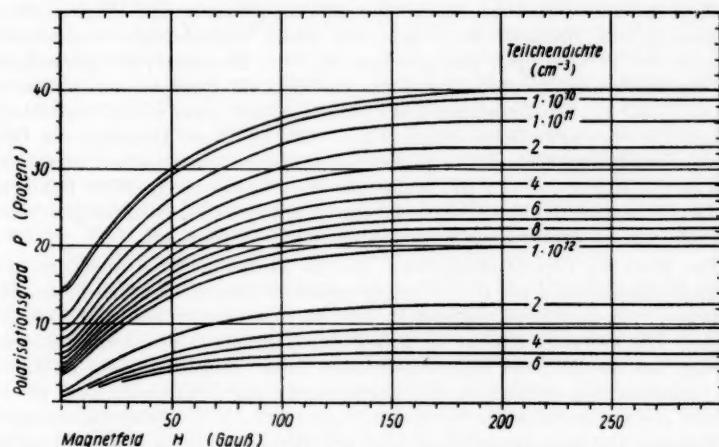


Abb. 3. Abhängigkeit des Polarisationsgrades von der Magnetfeldstärke bei verschiedenen Teilchendichten

ständiger Paschen-Back-Aufspaltung der Hyperfeinstruktur der  $3^2P$ -Terme und des Grundterms) zu erwarten<sup>21)</sup>. Wie sich leicht abschätzen läßt, liegt für die  $3^2P$ -Terme bereits bei 180 Gauß eine ziemlich vollständige Paschen-Back-Aufspaltung der Hyperfeinstruktur vor, während dies für den Grundterm wegen der wesentlich weiteren Abstände der Hyperfeinstrukturterme erst bei einer ungefähr zehnmal größeren Feldstärke der Fall ist<sup>22)</sup>.

#### 4. Diskussion der Meßergebnisse

Nachdem nun durch die Messungen sichergestellt worden ist, daß die Depolarisation bereits bei sehr geringen Teilchendichten einsetzt, kann eine Deutung des Effektes allein durch depolarisierende Stöße nicht aufrechterhalten werden. Gewiß müssen derartige Stöße bei etwas höheren Teilchendichten auch berücksichtigt werden. Doch werden theoretisch keine derart großen Querschnitte erwartet, daß die Stöße schon bei Teilchendichten  $N < 10^{11} \text{ cm}^{-3}$  eine merkliche Depolarisation bewirken können.

<sup>20)</sup> Die kleine Einbuchtung aller Kurven zwischen 0 und 10 Gauß ist jeweils nur entsprechend der Theorie<sup>9)</sup> angedeutet worden. Dieser Magnetfeldstärkebereich wurde im Rahmen dieser Arbeit nicht weiter untersucht.

<sup>21)</sup> A. G. G. Mitchell u. M. W. Zemansky, Resonance Radiation and Excited Atoms, S. 275, Cambridge 1934.

<sup>22)</sup> H. A. Bauer, Grundlagen der Atomphysik (2. Auflage), S. 192, Wien 1943; H. Kopfermann, Kermomente, S. 21 u. 119, Frankfurt/M. 1956.

Auch der Verlauf der Kurven  $P = P(H)$  spricht gegen die Erklärung durch depolarisierende Stöße. Da das Aufspaltungsbild der Hyperfeinstruktur beim Übergang vom Zeeman- zum Paschen-Back-Effekt sehr kompliziert ist<sup>23)</sup>, kann nur der Bereich zwischen 180 und 300 Gauß für Rückschlüsse auf die Gründe der Depolarisation verwandt werden. Dort liegt wenigstens eine nahezu vollständige Paschen-Back-Aufspaltung der Hyperfeinstruktur der  $3^2P$ -Terme vor, worauf bereits hingewiesen wurde. Nun müßte die Steigerung des Magnetfeldes wegen des damit verbundenen Auseinanderdrückens der Termgruppen mit gleichem  $m_J$  eine Abnahme der Querschnitte der depolarisierenden Stöße zur Folge haben, und zwar bei einem Anstieg von 172,5 auf 276 Gauß etwa um den Faktor  $3/4$  (nach einer rohen Abschätzung mittels der oben erwähnten Relation  $q \sim \Delta E^{-1/2}$ ). Diese Abnahme der Querschnitte müßte im Gegensatz zu den Versuchsergebnissen einen merklichen Anstieg der Kurven  $P = P(H)$  (außer für  $N \rightarrow 0$ ) bewirken. Eine Erklärung der Depolarisation der Resonanzstrahlung ist mit Hilfe der Strahlungsdiffusion möglich, worauf später noch weiter eingegangen werden soll.

Der Wert des Polarisationsgrades, den die Verfasser<sup>10)</sup> bei Anregung eines Natrium-Atomstrahls bei  $H = 0$  früher erhalten haben, fügt sich in die neue Meßkurve ein (s. Abb. 2, Meßpunkt für die kleinste untersuchte Teilchendichte). Die Verfasser hatten für ihre Untersuchungen einen Atomstrahl verwendet, um die Zahl der depolarisierenden Stöße möglichst klein zu halten. Der experimentell bestimmte Polarisationsgrad lag zwar unter dem theoretischen Wert außerhalb der Genauigkeitsgrenzen, die die Fehlerrechnung für die Mittelwertbildung aus den verschiedenen Messungen lieferte, aber innerhalb der Grenzen, die unter Berücksichtigung der bei der Rechnung nicht erfaßten Fehlerquellen zu ziehen waren. Die Übereinstimmung des früheren Meßergebnisses mit der neuen Meßkurve deutet auf eine größere Genauigkeit der früheren Meßwerte hin, als ursprünglich angenommen wurde. Falls die Stöße den Depolarisationseffekt bewirken würden, so müßte bei gleicher Teilchendichte der Polarisationsgrad der Resonanzfluoreszenz des Atomstrahls erheblich größer sein als der der Resonanzfluoreszenz des Dampfes innerhalb einer Kuvette, da sich die Stoßzahlen in beiden Fällen beträchtlich unterscheiden. Wenn aber die wesentlich von der Teilchendichte abhängige Strahlungsdiffusion für die Depolarisation maßgebend ist, so muß die Depolarisation beide Male bei gleicher Teilchendichte ungefähr gleich sein. (Die Unterschiede in der Doppler-Breite und in der Geometrie der Anordnung dürften sich in ihrem Einfluß auf die Strahlungsdiffusion und damit auch auf den Polarisationsgrad in beiden Fällen etwa ausgleichen.)

Die Strahlungsdiffusion wirkt auf zweierlei Weisen depolarisierend. Die Ausstrahlung von Oszillatoren und Rotatoren, die den  $\pi$ - bzw.  $\sigma$ -Übergängen zuzuordnen sind, ist nicht isotrop. Das Licht, das ein Oszillator emittiert, ist linear, das eines Rotators elliptisch (in den beiden Grenzfällen zirkular und linear) polarisiert. Von den Rotatoren kann nun Strahlung absorbiert werden, die von Oszillatoren ausgeht, und umgekehrt. Das hat eine Depolarisation des sekundären Fluoreszenzlichts und der Fluoreszenzstrahlung höherer Ordnung zur Folge. Hierauf soll aber im einzelnen nicht näher eingegangen werden.

<sup>23)</sup> L. Davis, B. T. Feld, C. W. Zabel, u. J. R. Zacharias, Physic. Rev. **76**, 1076 (1949).

Während bei einer Aufspaltung in der Form des normalen Zeeman-Effektes (wie z. B. bei der Interkombinationslinie 2537 Å eines geradzahligen Quecksilber-Isotops oder der Resonanzlinie 4227 Å der geradzahligen Calcium-Isotope<sup>24)</sup>) allein die kurz erörterte Depolarisation durch richtungsabhängige Emission und Absorption bewirkt wird, kommt sonst noch die Depolarisation bei der Reemission hinzu. Bei  $\pi$ -Anregung tritt meistens eine Ausstrahlung von  $\pi$ - und  $\sigma$ -Licht auf, ebenso bei  $\sigma$ -Anregung. Zur Berechnung können die Formeln von van Vleck<sup>25)</sup> und Mitchell<sup>26)</sup> herangezogen werden. Durch diese Depolarisation bei der Remission wird ja bereits bewirkt, daß der Polarisationsgrad bei linear polarisierter Anregung der Natrium-Atome nicht 100 %, sondern für die  $D_1$ -Linie 0 % und für die  $D_2$ -Linie 18,97 % beträgt.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß bekanntlich beim Auftreten der Strahlungsdiffusion die Geometrie der Meßanordnung, insbesondere der Querschnitt des anregenden Strahls und seine Entfernung von der Wand, durch die das untersuchte Fluoreszenzlicht austritt, eine wesentliche Rolle spielt. So müssen sich bei unterschiedlichen Versuchsanordnungen Abweichungen zwischen den Meßergebnissen für den Polarisationsgrad ergeben.

Eine mathematische Behandlung des Problems ist praktisch nicht ohne vereinfachende Voraussetzungen möglich. Berechnungen des Polarisationsgrades, die von den Verfassern<sup>27)</sup> durchgeführt worden sind, lieferten Ergebnisse, die innerhalb gewisser durch die vereinfachenden Annahmen bedingter Grenzen mit dem experimentellen Befund übereinstimmen. Es kann also als gesichert angesehen werden, daß die Depolarisation bei sehr kleinen Teilchendichten durch die Strahlungsdiffusion bewirkt wird.

Auf Grund ihrer Untersuchungen an der Quecksilberlinie 2537 Å kamen Rollet, Brossel und Kastler<sup>28)</sup> und Guichon, Blamont und Brossel<sup>29)</sup> zu der gleichen Schlußfolgerung. In der ersten Arbeit wurde festgestellt, daß die mit  $N$  wachsende Depolarisation für reines Hg<sup>198</sup> viel schneller zunimmt als für natürliches Quecksilber; das ist nur beim Vorhandensein von Strahlungsdiffusion verständlich. Die zweite zitierte Arbeit bezieht sich auf geradzahlige Quecksilber-Isotope und geht von einer Radiofrequenz-Methode zur Messung der Lebensdauer angeregter Zustände aus. Die experimentell gefundenen Ergebnisse können auch hier nur mit dem Auftreten der Strahlungsdiffusion erklärt werden.

### 5. Zusammenfassung

Die Messungen des Polarisationsgrades der Natrium-Resonanzfluoreszenz bei Einstrahlung linear polarisierten Lichts ergaben, daß bereits bei Teilchendichten  $N \approx 10^{10}$  Na-Atome pro  $\text{cm}^3$  der Effekt der Depolarisation einsetzt. Das Auftreten von Stößen mit Übergängen zwischen den Zeeman-Niveaus

<sup>24)</sup> Natürliches Calcium enthält nur ein ungeradzahliges Isotop (Massenzahl 43) mit der sehr geringen Häufigkeit von 0,15 %, so daß eine besondere Abtrennung dieses Isotops nicht notwendig ist.

<sup>25)</sup> J. H. Van Vleck, Proc. Nat. Acad. Sci. **11**, 612 (1925).

<sup>26)</sup> A. C. G. Mitchell, Physic. Rev. **40**, 964 (1932).

<sup>27)</sup> Veröffentlichung in Vorbereitung.

<sup>28)</sup> N. Rollet, J. Brossel u. A. Kastler, C. R. Acad. Sci. Paris **242**, 240 (1956).

<sup>29)</sup> M. A. Guichon, J. E. Blamont u. J. Brossel, C. R. Acad. Sci. Paris **243**, 1859 (1956); J. Physique Radium **18**, 99 (1957).

muß als Erklärung aus theoretischen Erwägungen und auf Grund der experimentellen Ergebnisse abgelehnt werden. Offenbar wird die Depolarisation bei sehr kleinen Teilchendichten durch die Strahlungsdiffusion bewirkt; depolarisierende Stöße dürften erst bei höheren Teilchendichten einen merklichen Einfluß auf den Polarisationsgrad gewinnen.

Herrn Prof. Dr. R. Rompe danken wir dafür, daß wir die Untersuchungen in seinem Institut durchführen durften.

Berlin, II. Physikalisches Institut der Humboldt-Universität und Institut für Optik und Spektroskopie der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin.

Bei der Redaktion eingegangen am 21. August 1958.

xperi-  
sation  
wirkt;  
merk-

ungen

und  
issen-

## Der Einfluß hydrostatischen Druckes auf den Curiepunkt eines Ni-Zn-Ferrites

Von Konrad Werner

Mit 5 Abbildungen

### Inhaltsübersicht

Es werden Messungen über das Verhalten des Curiepunktes eines Ni-Zn-Ferrites unter hohem allseitigen Druck beschrieben. Die dabei verwendete Transformatormethode gestattet zwar nicht, den Umwandlungspunkt in der üblichen Weise genau zu bestimmen, doch werden Curiepunktsänderungen gut wiedergegeben. Die Messungen in einem Druckbereich bis zu 6000 at ergeben eine Verschiebung des Curiepunktes nach höheren Temperaturen hin.

Messungen von Curiepunktsverschiebungen durch allseitigen Druck sind von allgemeiner theoretischer Bedeutung. Die Druckabhängigkeiten der Curiepunkte verschiedener Stoffe werden zum Beweis für den Verlauf der Austauschintegralekurve herangezogen. Verschiedene Arbeiten der letzten Jahrzehnte zeigten sich widersprechende Resultate. Das lag an den experimentellen Schwierigkeiten der Hochdruckversuche, der Kleinheit der Effekte und den unterschiedlichen experimentellen Anordnungen<sup>1-3)</sup>. Eine umfangreiche Arbeit der letzten Zeit<sup>4)</sup> brachte interessante Ergebnisse für 13 verschiedene ferromagnetische Stoffe. Diese Ergebnisse stimmen nicht mit zwei allgemeinen Formen der Austauschwechselwirkungskurve überein. Für Fe konnte auch eine auf anderem Wege<sup>5,6)</sup> vorausgesagte Curiepunktsverschiebung nicht bestätigt werden. Bei Ferriten liegen bis auf eine Ausnahme<sup>4)</sup> noch keine Meßergebnisse über Curiepunktsänderungen durch allseitigen Druck vor.

In der vorliegenden Arbeit wurde ein Ni-Zn-Ferrit mit der molaren Zusammensetzung 15 % NiO, 35 % ZnO, 50 % Fe<sub>2</sub>O<sub>3</sub> untersucht. Die Probe hat einen Curiepunkt von etwa 45° C. Die Herstellung geschah in der üblichen Art durch Pressen des gemischten Pulvers in einer Ringform und anschließendes Sintern bei

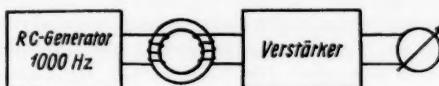


Abb. 1

<sup>1)</sup> L. H. Adams and J. W. Green, Philos. Mag. **12**, 361 (1931).

<sup>2)</sup> A. Michels u. a., Physics **4**, 1007 (1937).

<sup>3)</sup> H. Ebert u. A. Kubmann, Physik. Z. **39**, 598 (1938).

<sup>4)</sup> L. Patrick, Physic. Rev. **98**, 384 (1954).

<sup>5)</sup> M. Kornetzki, Z. Physik **98**, 289 (1935).

<sup>6)</sup> M. Kornetzki, Physik. Z. **44**, 296 (1943).

1300° C. Der Curiepunkt wurde mit einer einfachen Transformatormethode bestimmt (Abb. 1). Diese von Adams und Green<sup>1)</sup> zuerst angewandte und dann auch von Patrick<sup>4)</sup> benutzte Methode eignet sich besonders für die Hochdruckversuche.

Die am Instrument abgelesene Sekundärspannung des Meßtransformators wird als Funktion der Probentemperatur aufgetragen (Abb. 2, mittlere Kurve). Ist der Curiepunkt druckabhängig, verschiebt sich die unter Druck aufgenommene Kurve nach rechts oder links, je nachdem, ob Druck den Curie-

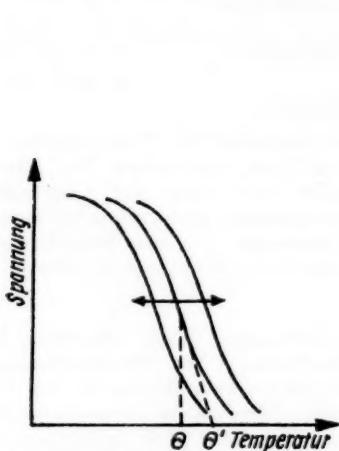


Abb. 2. Die Festlegung des Curiepunktes durch  $\Theta$  oder  $\Theta'$  ist für die Messung der Verschiebung (Doppelpfeil) ohne Einfluß

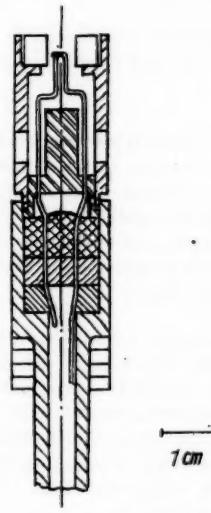


Abb. 3

punkt hebt oder senkt. Die Curiepunktsverschiebung kann bequem an der Stelle des steilsten Abfalls ausgemessen werden, ohne daß der Curiepunkt selbst genau festgelegt wird.

Der Einfluß des Druckes auf den Curiepunkt ist sehr gering. Es werden Drücke von mehreren 1000 at benötigt, um eine Verschiebung sicher festzustellen.

Von der verwendeten Hochdruckanlage soll nur der Stempel mit dem Meßaufsatz und den elektrischen Durchführungen beschrieben werden (Abb. 3). Er sitzt in der Innenbohrung des Hochdruckzylinders und ist mit einer „schwimmenden Dichtung“ nach Bridgman abgedichtet. Die Dichtringe bestehen aus Stahl, Zink, Turbax, Stahl (von unten gezählt). In dem stählernen Stempelkopf befinden sich unten zwei gut gehärtete Stahlscheiben und darüber eine Vergußmasse aus Epoxydharz und Quarzsand. Diese Art der druckdichten elektrischen Durchführung hat sich nach Überwindung anfänglicher Schwierigkeiten erstaunlich gut bewährt. Über der Füllung sitzt ein Perlonhalter für das Manganindrahtmanometer. In dem oberen Absatz des Meßaufsatzes liegt die ringförmige Ferritprobe. Wegen der besseren

ator-  
uerst  
sich  
tors  
rve).  
auf-  
rie-

Übersicht sind nur die beiden Zuführungsdrähte für das Thermoelement eingezeichnet.

Die Messungen erfolgten bei langsam gleitender Temperatur. Um eventuelle Nachwirkungerscheinungen auszuschalten, sind die Spannungs-Temperaturkurven sowohl während der Erwärmung als auch während der Abkühlung aufgenommen worden. Dabei ergaben sich keine Unterschiede. Die gemessenen Curiepunktsverschiebungen waren stets reproduzierbar.

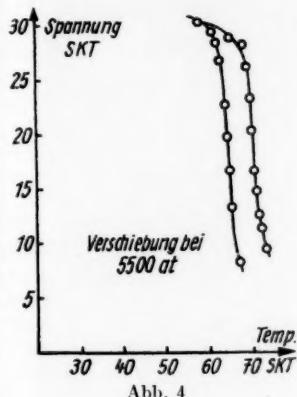


Abb. 4

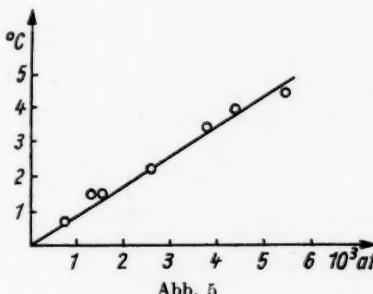


Abb. 5

Die Gestalt der durch den Druck verschobenen Kurve blieb bis zu den höchsten Drücken gleich. Allerdings waren die Maxima der druckverschobenen Kurven stets um einen vom jeweiligen Druck abhängigen Betrag erniedrigt. Das ist mit der unmittelbaren Einwirkung des Druckes auf die Magnetisierung verbunden und läßt sich durch Vergrößerung der Verstärkung ausgleichen, ohne daß dabei die Kurvengestalt geändert wird. Abb. 4 zeigt als Beispiel die Verschiebung bei 5500 at. Links ist die bei Normaldruck aufgenommene Kurve. Die Verschiebung läßt sich gut an der Stelle des steilsten Abfalls ausmessen. Spannung und Temperatur sind in beliebigen Skalenteilen aufgetragen.

In Abb. 5 wird ein Überblick über die einzelnen Messungen bei den verschiedenen Drücken gegeben. Auf der Ordinate sind die Verschiebungen in °C, auf der Abszisse die Drücke in 1000 at aufgetragen. Die Verschiebung geht in dem ausgemessenen Bereich linear mit dem Druck. Aus dem Diagramm läßt sich daher für jeweils 1000 at Druckdifferenz eine feste Curiepunktsverschiebung ablesen. Es ergibt sich dafür ein genauer Wert von  $+0,85^\circ \pm 0,06^\circ$  Celsius/1000 at.

Leipzig, Physik. Institut der Karl-Marx-Universität, Abt. Techn. Physik.

Bei der Redaktion eingegangen am 20. August 1958.

## Nichtstationäre Vorgänge in Photoleitern. II

### Langzeitiges Anklingen der Photoleitung von CdS-Einkristallen bei schwachen Anregungsintensitäten

Von K. W. Böer und H. Wantosch

Mit 6 Abbildungen

#### Inhaltsübersicht

Es wird gezeigt, daß das langzeitige Anklingen der Photoleitung bei schwacher Anregung im Ausläufer Aufschluß über das Hafttermspektrum liefert und insbesondere die Berechnung der Konzentration ausgeprägter Hafttermgruppen sowie deren Anhaftkoeffizienten für den Elektroneneinfang zuläßt. Dabei wird der Einfluß mehrerer Hafttermgruppen diskutiert. Für ein Beispiel wird die an einem Kristall gewonnene Anklingkurvenschar analysiert. Die Hafttermkonzentrationen sowie die entsprechenden Anhaftkoeffizienten werden angegeben.

#### 1. Einleitung

Der zeitliche Verlauf des Anklingens der Photoleitung ist in starkem Maße von der eingestrahlten Lichtintensität abhängig. In einer vorangegangenen Arbeit<sup>1)</sup> konnte gezeigt werden, daß bei entsprechender Wahl der Anregungsbedingungen Anklingkurven erhalten werden können, die Wendepunkte enthalten.

Dieses Verhalten kann mit dem üblichen einfachen reaktionskinetischen Modell (vgl. Abb. 1) verstanden werden, wobei eine optische Anregung von

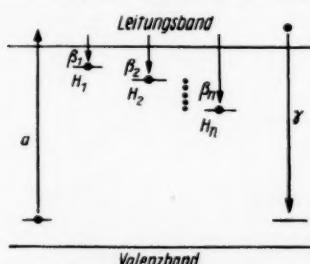


Abb. 1. Reaktionskinetisches Modell

Elektronen aus dem Valenzband bzw. aus Aktivatortermen direkt in das Leitungsband angenommen wird, der entgegen ein Anhaften der Elektronen an Hafttermen bzw. eine Rekombination mit den ionisierten Aktivatoren wirkt.

Solche Anklingkurven mit Wendepunkten geben durch eine relativ einfache mathematische Analyse Aufschluß über eine Reihe interessanter reaktionskinetischer Parameter. Es lassen sich, wie in<sup>1)</sup> gezeigt wurde, direkt die Konzentration  $H$

<sup>1)</sup> K. W. Böer u. H. Vogel, Ann. Physik 17, 10 (1955).

einer besonders ausgeprägten Hafttermgruppe sowie der entsprechende Anhaftkoeffizient  $\beta$  bestimmen.

Diese Parameter berechnen sich gemäß

$$H = a \tau_2$$

$$\beta = \frac{1}{n_{1,2} \cdot \tau_2}, \quad (1)$$

wobei  $a$  die Zahl der pro sec und  $\text{cm}^3$  durch Lichtanregung in das Leitungsband beförderte Elektronen,  $n_{1,2}$  die Elektronenkonzentration am ersten Wendepunkt und  $\tau_2$  der Zeitpunkt des deutlichen Wiederanstiegs nach Beendigung des „Plateaus“ einer solchen typischen Anklingekurve (vgl. Abb. 2) ist.

Die Untersuchungen wurden zunächst nur für Anklingekurven mit einem solchen Plateau durchgeführt und dementsprechend lediglich das reaktionskinetische Modell mit einer Hafttermgruppe genauer untersucht. Die ersten orientierenden Messungen zeigten jedoch, daß im allgemeinen kompliziertere Verhältnisse vorliegen, die im folgenden genauer untersucht werden sollen.

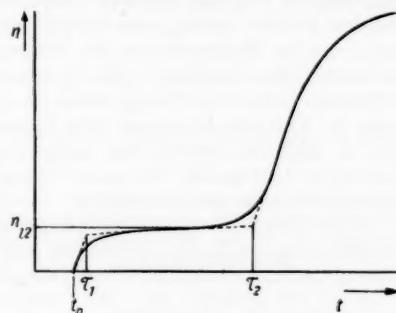


Abb. 2. Langzeitiges Anklingen der Photoleitung (schematischer Verlauf)

## 2. Experimentelle Anordnung

Die untersuchten CdS-Einkristalle wurden nach vorangegangener Oberflächenbehandlung durch eine Gasentladung im Hochvakuum mit Goldelektroden bedampft, deren Anordnung aus Abb. 3 ersichtlich ist. (Vgl.<sup>2)</sup>). Der Prüfling war in einem kühl- und heizbaren Rezipienten im Vakuum ( $p \leq 10^{-5}$  Torr) so angebracht, daß er unter weitgehender Ausschaltung von Streulicht im Ausläufer mit Hilfe einer HBO 200 belichtet werden konnte. Durch einen Monochromator wurde die Hg-Linie 546 [ $\mu\text{m}$ ] zur Anregung des Kristalls ausgewählt. Durch einen direkt vor dem untersuchten Kristall in der Öffnung eines lichtdichten Kastens angeordneten zweiten CdS-Kristall wurde störendes Streulicht im Grundgitter hinreichend absorbiert.

Randschichteneinflüsse an den stromführenden Kontakten wurden durch elektrometrische Potentialbestimmungen an den Sonden  $S_1$  und  $S_2$  (Abb. 3) eliminiert. Der zeitliche Verlauf des Stromes wurde zwischen den Kontakten  $K_1$  und  $K_2$  mit Hilfe eines Clamann & Grahnert-Meßverstärkers (Meßgrenze  $10^{-12}$  [A], Zeitkonstante 1 [s]) bestimmt.

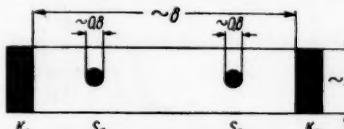


Abb. 3. Elektrodenanordnung der untersuchten CdS-Einkristalle

<sup>2)</sup> J. Faßbender, Z. Physik 145, 301 (1956).

An den Kristall wurde stets eine Spannung von 4 [V] gelegt. Der auf den Kristall fallende Lichtstrom betrug  $8,7 \cdot 10^{11}$  [Quanten/cm<sup>2</sup> s]. Bei einer angenommenen Quantenausbeute von 1 (El/abs. Qu) und einer Absorptionskonstante  $k = 12$  [cm<sup>-1</sup>] bei 546 [m $\mu$ ] ergibt sich bei den untersuchten Kristallen einer Dicke von 100 [ $\mu$ ] für die Zahl der pro sec und cm<sup>3</sup> in das Leitungsband angeregten Elektronen  $a \approx 9 \cdot 10^{12}$  [cm<sup>-3</sup> s<sup>-1</sup>].

### 3. Experimentelle Ergebnisse

Nach den in 1) angestellten Überlegungen kommen die Anklingkurven mit ausgeprägten Plateaus dadurch zustande, daß sich zwischen dem Anregungs- und dem Anhaftvorgang zunächst ein quasistationäres Gleichgewicht einstellen kann, das die Konzentration der Leitungselektronen im Gebiet des Plateaus im wesentlichen bestimmt. Mit Fortdauer der Anregung werden immer mehr Haftterme gefüllt und fallen daher für den Anhaftvorgang aus. Die Lebensdauer der Leitungselektronen kann daher wachsen, der Photostrom nimmt zu, bis sich schließlich infolge der immer stärker wirkenden Rekombination mit ionisierten Aktivatoren ein neues Gleichgewicht einstellt und der stationäre Photostrom angenommen wird.

Es ist daher nötig, vor Aufnahme solcher Anklingkurven die Haftterme weitgehend zu entleeren. Zu diesem Zweck wurde vor der Lichtenregung der Kristall im Dunkeln ausgeheizt und langsam auf die Meßtemperatur abgekühlt.

Der Grad der Entleerung konnte durch Aufnahme von Leitfähigkeitsglowkurven erfaßt werden. Um eine Erhöhung der thermisch erzeugten Fehlordnung zu vermeiden, wurde die maximale Ausheiztemperatur auf 50°C beschränkt.

Die Höhe dieser Temperatur ist ein Maß für den energetischen Abstand vom Leitungsband, bis zu welchem die Terme entleert wurden.

Abb. 4 zeigt die Schar von Anklingkurven der Photoleitung<sup>3)</sup> eines mit Kobalt aktivierten CdS-Einkristalls. Scharparameter ist die Vorbehandlung.

Die Meßkurven wurden bei Zimmertemperatur aufgenommen, die

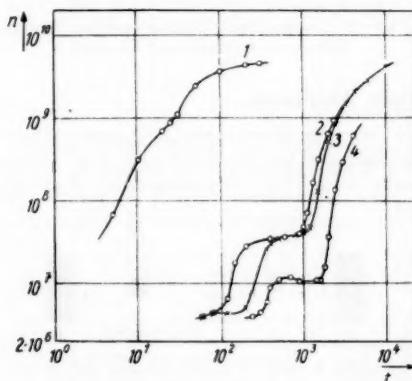


Abb. 4 Zeitlicher Verlauf der Leitungselektronenkonzentration beim langzeitigen Anklingen der Photoleitung (vgl. Text)

Kurve 1 wurde 5 Minuten nach Abschalten einer vorangegangenen monochromatischen (546 m $\mu$ ) Belichtung (bis zum stationären Endwert) aufgenommen. Sie zeigt bereits die Andeutung eines Plateaus. Vor Aufnahme der Kurve 2 wurde der Kristall 75 Minuten lang bei 35°C ausgeheizt und dann auf 18°C abgekühlt. Kurve 2 zeigt ein besonders deutlich

<sup>3)</sup> Zur Bestimmung der in Abb. 4 angegebenen Elektronenkonzentration aus dem gemessenen Verlauf des Photostromes wurde durch Messung des Hall-Effektes die Beweglichkeit bei der Meßtemperatur und vergleichbaren Lichtintensitäten ermittelt. Sie ergab sich zu 300 [cm<sup>2</sup>/Vs].

ausgebildetes Plateau. Vor Aufnahme der Kurve 3 wurde der Kristall 15 Stunden im Dunkeln bei  $18^\circ\text{C}$  belassen. Neben dem — jetzt kürzeren — Plateau zwischen  $3 \cdot 10^2$  und  $1,2 \cdot 10^3$  sec ist nun ein zweites Plateau zwischen 70 und  $2 \cdot 10^2$  sec zu erkennen. Vor Aufnahme der Meßkurve 4 wurde der Kristall schließlich bei  $50^\circ\text{C}$  75 Minuten lang getempert. Die Kurvenform ist deutlich verändert; es ist nur noch ein Plateau sichtbar, und die Andeutung eines nichtmonotonen Verlaufes zeigt sich.

In Abb. 5 ist eine Anklingekurve eines mit Fe dotierten CdS-Einkristalles wiedergegeben, die ebenfalls einen nichtmonotonen Verlauf zeigt. Sie wurde bei Zimmertemperatur erhalten, nachdem der Kristall dort 60 Stunden im Dunkeln belassen wurde.

Die in diesen beiden Abbildungen gezeigten Meßkurven sind nur Beispiele für ähnliche Kurven, die an einer großen Zahl „reiner“ bzw. unterschiedlich dotierter Kristalle gefunden wurden. Über den Einfluß der Dotierung soll an anderer Stelle ausführlich berichtet werden.

#### 4. Diskussion

Meßkurve 1 in Abb. 4 besitzt Wendepunkte und deutet damit bereits an, daß für ihr Zustandekommen der Einfang von Elektronen in Haftterme und ihre Füllung wesentlich ist. Legt man das einfache in <sup>1)</sup> beschriebene Modell zugrunde, so läßt sich nach den Gl. (1) der Anhaftkoeffizient zu

$$\beta \approx \frac{1}{30 \cdot 1,1 \cdot 10^6} = 3,0 \cdot 10^{-11} [\text{cm}^3 \text{s}^{-1}]$$

berechnen. Die Konzentration der zu Beginn des Anklingens unbesetzten Haftterme ergibt sich zu

$$H \approx 9 \cdot 10^{12} \cdot 30 = 2,7 \cdot 10^{14} [\text{cm}^{-3}]$$

Bei Meßkurve 2 war durch die stärkere Erwärmung und die längere Dunkelpause nach der vorangegangenen Belichtung eine größere Zahl von Haftterminen zu Beginn des Anklingens entleert. Das Plateau ist daher deutlicher ausgeprägt. Für den Anhaftkoeffizienten ergibt sich ein innerhalb der Fehlergrenzen mit dem aus Kurve 1 errechneten übereinstimmender Wert

$$\beta \approx \frac{1}{10^3 \cdot 4 \cdot 10^7} = 2,5 \cdot 10^{-11} [\text{cm}^3 \text{s}^{-1}]$$

Die Konzentration der zu Beginn des Anklingens unbesetzten Haftterme hat sich jedoch beträchtlich vergrößert und beträgt hier

$$H \approx 9 \cdot 10^{12} \cdot 10^3 = 9 \cdot 10^{15} [\text{cm}^{-3}]$$

<sup>4)</sup> In der Bezeichnungsweise von <sup>1)</sup> entspricht  $H$  dem Wert  $H - h(t_0)$ , wobei  $t_0$  die Zeit des Beginns der optischen Anregung ist.

Die konsequente Durchrechnung des Modells mit einer Hafttermgruppe führt jedoch bereits bei der Auswertung dieser Kurven zu beträchtlichen Schwierigkeiten. Es zeigt sich nämlich<sup>1)</sup>, daß auch aus dem Zeitpunkt des Beginns des Plateaus ( $\tau_1$  in Abb. 2) näherungsweise  $\beta \cdot H$  bestimmt werden kann:

$$\tau_1 = \frac{1}{\beta \cdot H}. \quad (2)$$

Prüft man diese Beziehung an den diskutierten Meßkurven, so bemerkt man eine offensichtliche Diskrepanz. Da  $\tau_1$  bei relativ großen Zeiten liegt, ergibt sich für  $\beta \cdot H$  ein um Größenordnungen zu kleiner Wert.

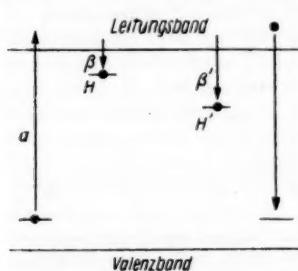


Abb. 6. Reaktionskinetisches Modell mit zwei Hafttermgruppen

zunächst nicht den Wert  $n_{1,2}$  für das zuvor besprochene Plateau erreichen kann, wenn  $\beta' \gg \beta$  ist<sup>5)</sup> (vgl. Abb. 6). Die Lebensdauer der Elektronen im Leitungsband wird dann zunächst so lange durch den Anhaftvorgang an den Hafttermen  $H'$  mit dem größeren Anhaftkoeffizienten  $\beta'$  bestimmt, bis diese weitgehend gefüllt sind, die Konzentration der Leitungselektronen wird also relativ gering gehalten. Erst nach einer Zeit

$$\tau'_2 = \frac{H'}{a}, \quad (3)$$

die etwa zur Füllung dieser Terme benötigt wird, kann die Elektronenkonzentration weiter ansteigen, bis sie den Wert  $n_{1,2}$  erreicht, der durch die Füllung der Haftterme  $H$  bestimmt wird. Damit ist die Zeit  $\tau_1$  des Beginns dieses Plateaus nicht mehr durch die Größen  $\beta$  und  $H$  bestimmt, sondern sie wird durch Wirkung der zuvor gefüllten Haftterme bis über den Wert  $\tau'_2$  vergrößert.

Im einfachen hier behandelten Falle zweier diskret liegender Hafttermgruppen können beide Gruppen zu je einem entsprechenden Plateau Veranlassung geben.

Um dieses experimentell nachzuweisen, müssen vor der Aufnahme der Anklingkurven auch Haftterme von Elektronen entleert werden, die einen größeren Anhaftkoeffizienten besitzen, also mit großer Wahrscheinlichkeit energetisch weiter vom Leitungsband entfernt liegen als die bisher betrachteten Terme.

Durch eine Erhöhung der Ausheiztemperatur oder beträchtliche Vergrößerung der Dunkelpause vor der Lichtanregung werden auch tieferliegende

<sup>5)</sup>  $H'$  darf allerdings nicht zu klein werden. Dabei bestimmt  $H'$  nach (3) das Zeitintervall, in dem die Elektronenkonzentration unter dem Wert  $n_{1,2}$  bleibt.

gruppe  
lichen  
kt des  
werden  
(2)  
man  
ergibt  
en zu  
diese  
B das  
Haft-  
isher  
nzen-  
en  $\beta$   
sicher  
hen-  
t, so  
An-  
tation  
schen  
onen  
gang  
nmt,  
onen  
(3)  
kon-  
Füll-  
ses  
wird  
ert.  
rm-  
an-  
der  
nen  
keit  
eh-  
rö-  
nde  
eit-

Haftterme in stärkerem Maße entleert. Kurve 3 in Abb. 4, die im Anschluß an eine besonders lange Dunkelpause aufgenommen wurde, zeigt deutlich zwei ausgeprägte Plateaus.

Dabei haben sich die Werte für  $n_{1,2}$  und  $\tau_2$  des auch schon in Kurve 2 vorhandenen Plateaus praktisch nicht verändert. Im Bereich kleiner Zeiten und Konzentrationen ist jedoch ein zweites Plateau aufgetaucht, das auf Haftterme einer Konzentration

$$H' \approx 9 \cdot 10^{12} \cdot 2 \cdot 10^2 = 1,8 \cdot 10^{15} \text{ [cm}^{-3}\text{]}$$

mit einem Anhaftkoeffizienten

$$\beta' \approx \frac{1}{4,5 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 10^2} = 1,1 \cdot 10^{-9} \text{ [cm}^3 \text{ s}^{-1}\text{]}$$

zurückzuführen ist. Dieser Anhaftkoeffizient ist um etwa zwei Größenordnungen größer als  $\beta$ .

Einen solchen „treppenförmigen“ Verlauf kann man jedoch nicht allgemein bei einer strukturierten Hafttermverteilung erwarten. So werden Haftterme hoher Konzentration mit großen Anhaftkoeffizienten solche mit geringerer Konzentration und kleineren Anhaftkoeffizienten hinsichtlich ihres Einflusses auf Anklingkurven überdecken.

Da jedoch nur solche Haftterme im Verlauf der Anklingkurven in Erscheinung treten, die bei Beginn der Lichtanregung nicht mit Elektronen besetzt waren, so lassen sich mit Hilfe dieser Methode durch Wahl verschiedener Anfangsbesetzungen und Temperaturen nacheinander einzelne Hafttermgruppen analysieren.

Werden Energiebereiche, in denen das Hafttermspektrum nicht strukturiert ist, durch entsprechende Anklingmessungen untersucht, so finden sich hier keine ausgeprägten Plateaus. Jedoch besteht durchaus die Möglichkeit, in solchen Bereichen, in denen der Anhaftvorgang bedeutend wahrscheinlicher ist als der Vorgang der Rekombination mit ionisierten Aktivatoren, aus dem Verlauf des Anklingens auch quantitative Schlüsse auf das Hafttermspektrum zu ziehen. Über dieses Problem sind weitere Untersuchungen im Gange.

In einigen experimentell realisierbaren Fällen scheint jedoch das bisher vorliegende Modell nicht zur Beschreibung des gefundenen Verhaltens auszureichen. Hier verlaufen die Anklingkurven in gewissen Teilbereichen nicht monoton (vgl. Kurve 4 in Abb. 4 sowie Abb. 5)<sup>6)</sup>. Ähnliche nichtmonotone Kurven sind bei photochemischen Prozessen sowie beim sog. negativen Photoeffekt bekannt geworden.

Infolge der für photochemische Reaktionen im CdS<sup>8-10)</sup> relativ niedrigen Untersuchungstemperatur (18° C) sowie des raschen zeitlichen Ablaufs dieser nichtstationären Vorgänge dürfte das fundene Verhalten eher im negativen

<sup>6)</sup> In bestimmten Fällen kann das reaktionskinetische Differentialgleichungssystem des einfachen Modells auch nichtmonotone Lösungskurven enthalten [vgl.<sup>7)</sup> S. 23ff.]. Es müssen jedoch Bedingungen erfüllt sein, wie  $\gamma > \beta$  und hohe Konzentration der Leitungselektronen, die hier sicher nicht erfüllt sind.

<sup>7)</sup> K. W. Böer u. H. Vogel, Z. physik. Chem. **206**, 1 (1956).

<sup>8)</sup> K. W. Böer, E. Borchardt u. W. Borchardt, Z. physik. Chem. **203**, 145 (1954).

<sup>9)</sup> K. W. Böer, Physica **20** (1954).

<sup>10)</sup> K. W. Böer, W. Borchardt u. S. Oberländer, Z. physik. Chem. im Druck.

Photoeffekt seine Ursache haben. Dabei ist zunächst nicht zu entscheiden, welcher der vielen vorgeschlagenen Mechanismen des negativen Photoeffektes<sup>11-18)</sup> hier zutrifft.

### 5. Zusammenfassung

Das langzeitige Anklingen der Photoleitung bei schwacher Lichtanregung gestattet, Aufschlüsse über das Hafttermspektrum in der verbotenen Zone zu erhalten. Dabei treten bei bestimmter Versuchsführung an Kristallen, die ein strukturiertes Hafttermspektrum besitzen, Anklingkurven auf, die Wendepunkte besitzen. Es lassen sich sog. Plateaus erkennen, die durch die sukzessive Füllung ausgeprägter Hafttermgruppen verursacht werden und die Berechnung der Hafttermkonzentration sowie des entsprechenden Anhaftkoeffizienten ermöglichen. Es wird darauf hingewiesen, daß zur Berechnung dieser Größen lediglich die Konzentration der Leitungselektronen am Plateau sowie die Zeit des Wiederanstiegs am Ende des Plateaus verwandt werden dürfen. Die Zeit des Plateaubeginns wird durch den Einfluß anderer Haftterme im allgemeinen zu wesentlich größeren Zeiten verschoben und würde bei der Auswertung nach dem einfachen in der vorangegangenen Arbeit beschriebenen Modell falsche Werte liefern.

Für die Hilfe bei der Ausführung der Messungen danken wir Herrn cand. phys. H. Heß. Für die Messung der Hall-Beweglichkeit danken wir Herrn Dipl.-Phys. G. Voigt.

<sup>11)</sup> P. G. Borsyk, Phys. Schriften Akad. Wiss. UdSSR **6**, 289 (1937).

<sup>12)</sup> A. W. Joffee, Sowj. Phys. **11**, 241 (1937).

<sup>13)</sup> A. N. Kronhaus u. E. Ljapidewsky, Z. exp. theor. phys. **26**, 115 (1954).

<sup>14)</sup> E. G. Misseljuk, E. B. Martens, Z. exp. theor. Phys. **14**, 115 (1952).

<sup>15)</sup> F. Borisow u. St. Koner, Z. physik. Chem. **205**, 46 (1956).

<sup>16)</sup> F. Wolkenstein, Leitfähigkeit d. Halbleiter, Moskau-Leningrad 1947.

<sup>17)</sup> W. Shuse u. R. Rywkin, Z. exp. theor. Phys. **20**, 1952 (1950); Ber. Akad. Wiss. UdSSR **77**, 241 (1951).

<sup>18)</sup> F. Stöckmann, Z. Physik **143**, 348 (1955).

Berlin, II. Physikalisches Institut der Humboldt-Universität und Laboratorium für die Physik des elektrischen Durchschlags der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin.

Bei der Redaktion eingegangen am 28. Juli 1958.

egung  
Zone  
n, die  
ende-  
suk-  
d die  
haft-  
nung  
ateau  
erden  
Haft-  
ürde  
arbeit

and.  
Herrn  
  
Wiss.  
  
ab-  
emie

## **On Flammersfeld's Range-Energy Relation for Electrons**

*By Yatendra Pal Varshni and Ramesh Chandra Karnatak*

With 5 Figures

### **Abstract**

Flammersfeld Range-Energy relation for electrons in Aluminium has been examined. It is found that it is satisfactory for  $E > 0,2$  Mev. For lower energies a power relation  $E = C R^m$  is suitable.  $dE/dR$  as calculated from these equations differs considerably from the theoretical results. Possible reasons for the discrepancy have been discussed.

### **Introduction**

The absorption method is widely used for determining electron energies of both monoenergetic and nuclear beta rays from their ranges in Aluminium.

For determining the energy from the observed ranges, it is necessary to have a knowledge of range-energy relation. For this purpose an accurate graph or empirical equation between range and energy is required. Besides the electron energy measurements, the range energy curve is of theoretical interest also because of its bearing on the rate of energy loss by electrons through ionization.

The absorption curves of monoenergetic beams of electrons have a long straight portion down to fairly low intensities and then a considerable tail going into the background. The point at which the extension of the linear region meets the background is defined as the practical range ( $R_p$ ) whereas the point where the tail meets the background is known as the maximum range ( $R_0$ )<sup>1</sup>. Most of the workers have measured  $R_p$ .

For beta rays a method of absorption curve analysis is used. There are a number of such methods<sup>1</sup>). The range of beta rays is usually designated by  $R_\beta$ .

A plot of  $R_p$  and  $R_\beta$  against the energy  $E$  shows that for the same  $E$ , the values of  $R_p$  and  $R_\beta$  usually do not differ more than the experimental errors. Hence, in general, in this paper the range is denoted by  $R$  (which includes both  $R_p$  and  $R_\beta$ ). In the following the ranges ( $R$ ) in aluminium are given in  $\text{mg/cm}^2$  and the energies ( $E$ ) in Mev or Kev.

### **Range-Energy Relations**

A number of range-energy relations for electrons have been suggested.

<sup>1</sup>) L. Katz and A. S. Penfold, Rev. Mod. Physics **24**, 28 (1952).

One of the simplest is due to Feather<sup>2)</sup>

$$R = A E - B. \quad (1)$$

This relation is only approximate and applicable in the region 0,8 Mev to 3,0 Mev. The values of the constants  $A$  and  $B$  as determined by a number of workers have been summarised by Katz and Penfold<sup>1)</sup>.

As a  $\log E$ ,  $\log R$  graph shows linearity, though only in small intervals, some workers<sup>3-6)</sup> have used a power formula:

$$R = a E^n \quad (2a)$$

or

$$E = C R^m. \quad (2b)$$

The values of the constants as determined by different workers are given in the discussion. However, this equation does not have a general validity as  $n$  varies in the different energy regions.

Katz and Penfold<sup>1)</sup> studied the variation of  $n$  with  $E$  and found that

$$n = 1,265 - 0,0954 \ln E. \quad (3)$$

Flammersfeld<sup>7)</sup> in 1947 proposed the following equation from semi-theoretical considerations:

$$E = a (R^2 + b R)^{1/2}. \quad (4)$$

For determining the values of  $a$  and  $b$ , Flammersfeld made use of the range-energy values for a number of beta ray spectra with end point energies between 0,09 and 3,0 Mev, as well as the  $R_0$  values given by Varder<sup>8)</sup> and Schonland<sup>9)</sup>. He obtained  $a = 1,92 \cdot 10^{-3}$  and  $b = 0,22 \cdot 10^3$ .

Glocker<sup>5)</sup> has re-evaluated the values of  $a$  and  $b$  on the basis of the values of  $R_p$  given by Varder and Schonland. He finds  $a = 2,1 \cdot 10^{-3}$  and  $b = 0,13 \cdot 10^3$ .

In recent years the ranges of beta rays of a good number of radioactive nuclei and the corresponding energies have been accurately measured. Hence it was thought worthwhile to test the applicability and examine the limitations of the Flammersfeld relation.

Eq. (4) can be put as

$$E^2 = a^2 R^2 + a^2 b R$$

or

$$E^2/R = p R + q \quad (5)$$

where  $p$  and  $q$  are constants. Thus a plot of  $E^2/R$  against  $R$  should be linear according to this equation.

<sup>2)</sup> N. Feather, Physic. Rev. **35**, 1559 (1930).

<sup>3)</sup> L. E. Glendenin and C. D. Coryell, MDDC 19, (1946).

<sup>4)</sup> W. E. Libby, Anal. Chemie **192** (1947).

<sup>5)</sup> R. Glocker, Z. Naturforsch. **3a**, 147 (1948).

<sup>6)</sup> R. O. Lane and D. J. Zaffarano, Physic. Rev. **94**, 960 (1954).

<sup>7)</sup> A. Flammersfeld, Naturwissenschaften **33**, 280 (1946); Z. Naturforsch. **2a**, 370 (1947).

<sup>8)</sup> R. W. Varder, Philos. Mag. **29**, 725 (1915).

<sup>9)</sup> V. F. J. Schonland, Proc. Roy. Soc. London (A) **104**, 235 (1923); (A) **108**, 187 (1925).

Fig. 1 shows  $E^2/R$  against  $R$  for aluminium from the available experimental data. (To avoid overlapping all points in the extreme low energy region have not been plotted). The sources for the data have been given in Tables I and II. Varder<sup>8</sup>), Schonland<sup>9</sup>) and Eddy<sup>10</sup>) have given  $H\varrho$  values instead of  $E$ . The  $H\varrho$  values were converted in  $E$  from the tables of Gerholm<sup>11</sup>).

It would be noticed from Fig. 1 that for ranges higher than  $50 \text{ mg/cm}^2$  ( $E = 0,22 \text{ Mev}$ ) the spread of the points indicates a straight line. A least square treatment of the data  $E > 0,2 \text{ Mev}$  yielded the following equation:

$$E^2/R = 3,4174 \cdot 10^{-6} R + 9,1659 \cdot 10^{-4}.$$

The line has been shown in the diagram. The observed and calculated values of  $E$  have been compared in Table I.

At  $R \sim 50$ , there is a sharp bent. It was suspected that for the lower points another linear relation between  $E^2/R$  and  $R$  may be possible. For low energies it is more convenient to express  $E$  in Kev, hence in the following  $E < 0,2 \text{ Mev}$  has been expressed in Kev. Fig. 2 shows  $E^2/R$  versus  $R$  for points lower than  $E = 200 \text{ Kev}$ . It is seen that the possibility of a straight line has to be ruled out. In the low energy region the equation of Katz and Penfold also does not hold (Lane and Zaffarano<sup>6</sup>) and Hoffmann<sup>12</sup>)).

Hence for this region recourse was taken to a power type of equation. Fig. 3 exhibits  $\log_{10} E$  against  $\log_{10} R$  for this region. A straight line appears to be a good solution. Least square treatment of the data led to the following

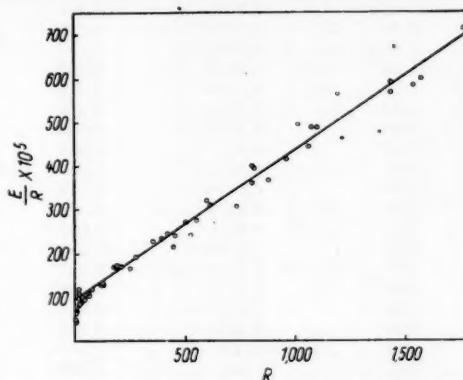


Fig. 1.  $E^2/R$  versus  $R$ . Deviations from straight line in low energy region are obvious

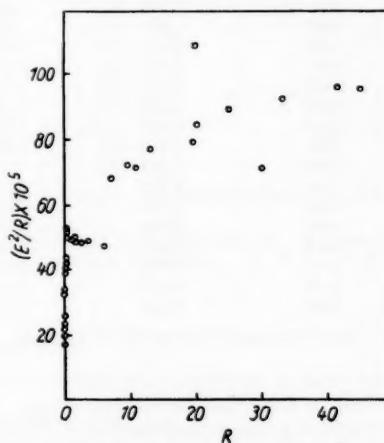


Fig. 2.  $E^2/R$  versus  $R$  for the region  $E < 2 \text{ Mev}$

<sup>10</sup>) C. E. Eddy, Proc. Cambridge philos. Soc. **25**, 50 (1929).

<sup>11</sup>) T. R. Gerholm in K. Siegbahn, Beta and Gamma Ray Spectroscopy, North Holland Publishing Co. Amsterdam, 926 (1955).

<sup>12</sup>) O. Hoffmann, Z. Physik **143**, 147 (1956).

Table I

$R$ mg/cm <sup>2</sup>	$E_{\text{calc}}$ Mev	$E_{\text{obs}}$ Mev	Error %	Reference
45	0,2195	0,206	6,55	E
48	0,2278	0,220	3,55	K
63,4	0,2681	0,263	1,93	E
64	0,2695	0,261	1,34	V
81	0,3109	0,310	0,29	K
122	0,4032	0,400	0,80	K
124	0,4076	0,405	0,64	V
127	0,4141	0,403	2,75	E
181	0,5271	0,555	5,03	K
189	0,5433	0,569	—4,52	V
193	0,5516	0,576	—4,23	E
213	0,5918	0,600	—1,37	K
254	0,6733	0,650	3,58	K
277	0,7184	0,730	—1,59	K
279	0,7223	0,735	—0,37	V
360	0,8791	0,904	—2,75	V
399	0,9538	0,970	—1,67	K
426	1,006	1,022	—1,57	K
447	1,045	0,980	6,63	K
462	1,073	1,05	2,19	K
508	1,161	1,17	—0,77	K
527	1,197	1,13	5,93	K
557	1,253	1,24	1,05	K
601	1,336	1,39	—3,88	K
621	1,374	1,39	—1,15	K
741	1,599	1,50	6,60	K
810	1,727	1,71	0,99	K
812	1,731	1,80	—3,88	K
821	1,748	1,80	—2,89	K
885	1,867	1,80	3,78	K
966	2,018	2,00	0,90	K
1023	2,125	2,25	—5,55	K
1065	2,203	2,18	1,05	K
1080	2,230	2,30	—3,04	K
1105	2,277	2,32	—1,85	K
1198	2,449	2,60	—5,81	K
1220	2,491	2,37	5,10	K
1384	2,796	2,56	9,22	K
1440	2,899	2,86	1,36	K
1440	2,899	2,92	—0,72	K
1454	2,925	3,12	—3,04	K
1540	3,085	3,00	+2,83	K
1575	3,150	3,07	2,61	K
1770	3,510	3,55	—1,13	K

Key to references given below Table II.

result:

$$\log_{10} E = 1,3331 + 0,6077 \log_{10} R$$

or

$$E = 21,54 R^{0,6077}.$$

Table II records the observed and the calculated values together with percentage errors.

Table II

<i>R</i> mg/cm <sup>2</sup>	<i>E</i> <sub>calc</sub> Kev	<i>E</i> <sub>obs</sub> Kev	Error %	Material*	Reference
0,023	2,175	2,3	— 5,22	C—Al	L
0,024	2,232	2,2	1,36	C—Al	L
0,024	2,232	2,3	— 3,04	C—Al	L
0,032	2,659	2,6	2,31	C—Al	L
0,039	2,998	3,2	— 6,25	C—Al	L
0,040	3,045	2,65	15,00		H
0,058	3,817	3,35	1,40		H
0,068	4,204	4,7	—10,63	C—Al	L
0,076	4,498	4,15	8,43		H
0,082	4,710	5,3	—11,13	C—Al	L
0,091	5,018	5,5	— 8,73	F—Al	L
0,095	5,150	4,4	17,04		H
0,10	5,314	6,3	—15,71	F—Al	L
0,25	9,272	10,2	— 9,12		S
0,336	11,100	12,05	— 7,88		S
0,375	11,87	13,9	—15,32		S
0,39	12,15	12,7	— 4,33	F—Al	L
0,664	16,79	18,7	—10,21		S
1,17	23,69	23,9	— 0,88		S
1,57	28,32	27,3	3,74		L
1,89	29,62	29,1	1,79		S
2,32	35,91	33,4	7,51		S
3,41	45,38	40,7	11,50		S
6,0	63,97	53,0	20,70		K
7,0	70,26	68,9	1,97		
9,5	84,57	83,0	1,89		S
10,8	91,43	87,6	4,37		S
13,0	102,3	100,0	2,30		C
18,0	124,7	146,5	—14,88		V
19,5	130,9	124,0	5,56		C
19,8	132,1	146,5	— 9,83		E
20,0	132,9	130,0	2,23		K
25,0	152,3	149,0	2,21		C
30,0	170,1	146,0	16,51		K
33,0	180,3	174,0	3,62		C
41,5	207,2	199,0	4,12		C

\* F—Al indicates aluminum coated Formvar; and C—Al, aluminum coated collodion, other observations are for Aluminum.

Key to references: C — Carlrik, see ref. 1; E — Eddy, ref. 10; H — Hoffmann, ref. 12; K — Katz and Penfold, ref. 1; L — Lane and Zaffarano, ref. 6; S — Schonland, ref. 9; V — Varder, ref. 8

### Discussion

It is apparent from Table I that Flammersfeld relation is quite satisfactory in the region 0,2 to 3,5 Mev, the average percentage error (regardless of sign) being only  $\pm 2,92$ . The values of the constants *p* and *q* determined in this paper have been compared with those of Flammersfeld<sup>7</sup>) and Glocker<sup>5</sup> in Table III.

Our values of *p* and *q* are quite near to those of Flammersfeld. Glocker's values are much different. Perhaps the reason lies in the fact that we did not take into consideration points below 0,2 Mev, while Glocker did.

As remarked earlier, Flammersfeld relation is not suitable below 0,2 Mev. However, one may stretch the limit up to 0,15 Mev. Glocker had also noticed departures from Flammersfeld relation at low energies.

For low energy region the power relation (2b) is seen (Table II) to be quite workable. However, the average percentage error  $\pm 7,46$  is much larger than in the former case. The values of the constants  $a$ ,  $n$ ,  $c$ ,  $m$  as determined by various workers have been summarized in Table IV.

Our values of  $c$  and  $m$  are in agreement with values of other workers for this energy region viz. those of Libby, Glocker and Lane and Zaffarano.

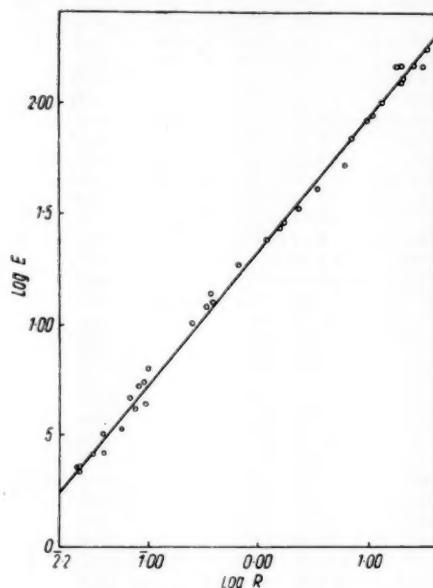


Fig. 3.  $\log_{10} E$  versus  $\log_{10} R$

With our values of the constants we get for  $E < 0,2$  Mev

$$dE/dR = 0,6077 E/R$$

and for  $E > 0,2$  Mev

$$\frac{dE}{dR} = \frac{3,4174 \cdot 10^{-6} R + 4,5829 \cdot 10^{-4}}{E}$$

The curves obtained by the above two expressions have been joined smoothly in fig. 4.

Theoretical calculations of the rate of energy loss of electrons by ionization ( $-dE/dx$ ) have been made by Katz and Penfold<sup>1)</sup> and more recently by Nelms<sup>14)</sup>. Theoretical curve calculated from the relativistic equation by Nelms has also been reproduced in fig. 4.

Table III

Author	$p$	$q$
Flammersfeld	$3,686 \cdot 10^{-6}$	$8,109 \cdot 10^{-4}$
Glocker	$4,41 \cdot 10^{-6}$	$5,733 \cdot 10^{-4}$
This paper	$3,4174 \cdot 10^{-6}$	$9,1659 \cdot 10^{-4}$

<sup>13)</sup> T. J. Wang, Nucleonics 7, 55 (1950).

<sup>14)</sup> A. T. Nelms, Natl. Bur. Stand. Circ. 577 (1956).

Table IV  
( $E$  in Mev,  $R$  in mg/cm<sup>2</sup>)

Author	$a$	$n$	$c$	$m$	Energy Interval (Mev)
Glendenin and Coryell <sup>3)</sup>	407	1.38	0.01285	0.7246	0.15—0.80
Libby <sup>4)</sup>	667	1.66	0.0199	0.6024	0.05—0.15
Glocker <sup>5)</sup>	708	1.72	0.02203	0.5814	0.001—0.3
Katz and Penfold <sup>1)</sup>	412	1.265 —0.0954 ln $E$			0.01—2.5
Lane and Zaffarano <sup>6)</sup>			0.0222	0.6	upto 0.04
This paper			0.02154	0.6077	0.002—0.2

It will be noticed that the numerical magnitude of empirical  $dE/dR$  is higher than the theoretical  $(-dE/dx)$  for the energy region under consideration. Similar results were found by Katz and Penfold<sup>1)</sup>. The possible reasons for this discrepancy are discussed below.

1. As a first approximation the equations for  $(-dE/dx)$  is (Bethe and Ashkin<sup>15)</sup>)

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{4\pi e^4 NZ}{m v^2} \log_e \frac{m v^2}{2I} \sqrt{e/2}$$

where the symbols have their usual meanings.

The value of the average excitation potential  $I$  (148 e. V. for Al) has been obtained from measurements on protons and it may be questioned how far it is justified to use this value for electrons also. Tsien<sup>16)</sup> who took the range to be the total length of the track of an electron as measured in a cloud chamber found  $I = 100$  e.v. for air. This value is higher than the value found from Proton energy loss measurements viz. 80.5 e.v. Theoretical considerations also suggest a higher  $I$  for electrons than for heavy ions (Bethe and Ashkin<sup>15</sup>).

If we use a higher value ( $>148$  e.V.) in the theoretical expression, the numerical value of  $(-dE/dx)$  would be smaller, making the situation worse. As

<sup>15)</sup> H. A. Bethe and J. Ashkin in E. Segrè, Experimental Nuclear Physics, Vol. I., John Wiley & Sons (1953).

<sup>16)</sup> San-Tsiang Tsien, Ann. Physique Paris **19**, 327 (1944).

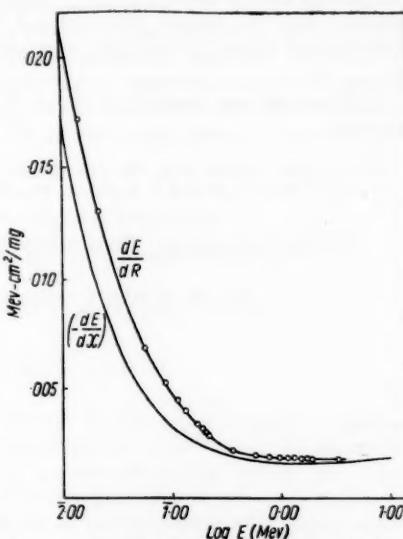


Fig. 4. Comparison of empirical  $dE/dR$  and theoretical  $(-dE/dx)$

an empirical fact we may add that if  $I$  is taken to be  $\sim 15$  e.v. (about one tenth) the theoretical curve can be made to coincide with the  $dE/dR$  curve.

2. Katz and Penfold have discussed the question whether the empirical  $dE/dR$  is to be identified with the average rate of energy loss or the most probable energy loss. However, Bohr<sup>17)</sup> has pointed out that the most probable energy loss is considerably less than the average loss for an electron. Warshaw and Chen<sup>18)</sup> have given a graph illustrating the point. Thus most probable energy loss curve would be in greater disagreement with the empirical  $dE/dR$  curve. So this possibility is to be dropped out.

3. Radiation losses. The radiation losses become important above the critical energy. Critical energy is defined as that energy at which the ionization loss per cm. due to collisions involving transfers of less than 5 Mev is equal

in magnitude to the radiative energy loss (Bethe and Ashkin<sup>15)</sup>). For Aluminium the critical energy is 47 Mev and thus the radiation loss, for the energy region under consideration, is of no consequence.

4. Scattering effects. Due to its small mass the path of an electron in the foil is zigzag as shown in fig. 5. The theoretical 'x' refers to the total path length of the electron, while one measures  $R \cdot As x > R$  it is obvious that the theoretical value of  $dE/dx$  would be smaller than the experimental  $dE/dR$ .

Under the circumstances, it appears that this is the main reason for the discrepancy between the theoretical  $(-dE/dx)$  and the experimental  $dE/dR$ . The  $dE/dR$  values are some 25% higher than the  $(-dE/dx)$  values, which indicates that the actual path covered by the electrons is greater than the experimental values by the same amount.

Fig. 5. Path of an electron in the absorber

The  $dE/dR$  values are some 25% higher than the  $(-dE/dx)$  values, which indicates that the actual path covered by the electrons is greater than the experimental values by the same amount.

The authors are thankful to Prof. K. Banerjee for his kind interest in the work.

<sup>17)</sup> N. Bohr, Philos. Mag. **30**, 581 (1915).

<sup>18)</sup> S. D. Warshaw and J. L. Chen, Physic. Rev. **80**, 97 (1950).

Allahabad (India), Physics Department, Allahabad University.

Bei der Redaktion eingegangen am 10. März 1958.

## **Pulsating Fluid Sphere in General Relativity**

By Priyansu Sen Gupta

### **Summary**

The note presents a solution of the Einstein Gravitational equations representing a pulsating fluid sphere in an outside empty space.

### **1. Introduction**

The isotropic cosmological model of General Relativity starts from a singular state (if the Cosmological constant  $\lambda$  be equal to Zero). Physically it apparently corresponds to an unlimited contraction of a fluid under the action of gravity. It is also known, further, that even the introduction of a homogeneous pressure does not change the picture. Classically this corresponds to the fact that an uniform pressure does not give rise to any force. It would therefore appear that in case there is a pressure gradient in the fluid, then under some circumstances the influence of gravity might be opposed by the force due to the pressure gradient and the fluid mass instead of contracting to a state of vanishing volume might show a pulsating behaviour between two extrema. To have an idea as to whether such oscillations are at all possible we shall investigate in the present note the behaviour of a fluid sphere in which the pressure is not uniform, the sphere being placed in an otherwise empty space.

### **2. Field equations and their integration**

We consider a spherically symmetric line element of the form

$$ds^2 = -e^\mu (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2) + e^r dt^2, \quad (1)$$

where  $\mu = \mu(r, t)$  and  $r = r(r, t)$ .

We shall assume that the fluid is at rest in the above coordinate system (comoving coordinate system) and extends up to  $r = a$ . Further for simplicity we shall restrict our consideration to the case where the density  $\rho \equiv T_4^4$  is a function of  $t$  alone. We shall not however place any a priori restriction on the pressure, except that it must vanish at the boundary with empty space. Thus in a sense we are considering the generalisation of Schwarzschild's homogeneous fluid sphere problem.

The Einstein gravitational equations give<sup>1)</sup>

$$8\pi T_1^1 = -e^{-\mu} \left( \frac{\mu'^2}{4} + \frac{\mu' v'}{2} + \frac{\mu' + v'}{r} \right) + e^{-\nu} \left( \ddot{\mu} + \frac{3}{4} \dot{\mu}^2 - \frac{\dot{\mu} \dot{v}}{2} \right), \quad (2)$$

$$8\pi T_2^2 = 8\pi T_3^3 = -e^{-\mu} \left( \frac{\mu''}{2} + \frac{v''}{2} + \frac{v'^2}{4} + \frac{\mu' v'}{2} \right) + e^{-\nu} \left( \ddot{\mu} + \frac{3}{4} \dot{\mu}^2 - \frac{\dot{\mu} \dot{v}}{2} \right), \quad (3)$$

$$8\pi T_4^4 = -e^{-\mu} \left( \mu'' + \frac{\mu'^2}{4} + \frac{2\mu'}{r} \right) + \frac{3}{4} e^{-\nu} \dot{\mu}^2, \quad (4)$$

$$8\pi T_4^1 = -e^{-\mu} \left( \dot{\mu}' - \frac{\dot{\mu} v'}{2} \right), \quad (5)$$

$$8\pi T_1^4 = -e^{-\nu} \left( \dot{\mu}' - \frac{\dot{\mu} v'}{2} \right), \quad (5a)$$

where in our case

$$T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = -p, T_4^1 = T_4^4 = 0 \text{ and } T_1^4 = \varrho.$$

Therefore the equation 5 or (5a) gives on integration

$$e^\nu = \dot{\mu}^2/A, \quad (6)$$

where  $A = A(t)$ .

Now putting<sup>2)</sup>

$$e^\mu r^2 = \xi^4 \text{ and } x = \log r$$

the equation (4) gives on integration

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \pm \frac{1}{2} \xi [1 + (A^2/4 - 8\pi \varrho/3) \xi^4]^{\frac{1}{2}}, \quad (7)$$

where we have put a constant of integration equal to zero to avoid any singularity at the origin.

It is easy to see that the case  $A^2/4 = 8\pi \varrho/3$  leads to homogeneous pressure. Disregarding this case the above eq. gives on intergration

$$e^\mu = \frac{4c^2}{(1 - c^2 r^2)(A^2/4 - 8\pi \varrho/3)}, \quad (8)$$

where  $C$  is again a function of  $t$  alone.

Let us write

$$\frac{4c^2}{(A^2/4 - 8\pi \varrho/3)} \equiv f, \quad (9)$$

$$e^\mu = \frac{f}{(1 - c^2 r^2)}. \quad (10)$$

(6) and (10) thus give the field within the sphere. The solution obviously involves two arbitrary functions of time. We can calculate the pressure with the

<sup>1)</sup> R. C. Tolman, Relativity, Thermodynamics and Cosmology (Oxford University press) p. 252.

<sup>2)</sup> M. Wyman, Physic. Rev. **70**, 74 (1946).

help of (2), (6) and (10). This gives

$$(2) \quad -8\pi p = \frac{(A^2/2 + 8\pi\varrho/3) \{ \dot{f}(1 - c^2 r^2) + A c \dot{c} f r^2 \} + A \dot{A} f (1 - c^2 r^2) - 16 c \dot{c} (1 - c^2 r^2)}{\dot{f}(1 - c^2 r^2) + 4 c \dot{c} f r^2} \quad (11)$$

(3) Now the condition that the field of the fluid sphere may pass over continuously to the field of empty space at  $r = a$  is that the pressure must vanish at  $r = a^3$ .  
 (4) This gives from (11)

$$(5) \quad (A^2/2 + 8\pi\varrho/3) \{ \dot{f}(1 - c^2 a^2) + A c \dot{c} f a^2 \} + A \dot{A} f (1 - c^2 a^2) - 16 c \dot{c} (1 - c^2 a^2) = 0. \quad (12)$$

(5a) eliminating  $A$  from (12) with the help of (9) and then integrating we get

$$(6) \quad f = \frac{\alpha (1 - c^2 a^2)}{\varrho^{1/2}}, \quad (13)$$

where  $\alpha$  is an integration constant. We finally have

$$(6) \quad \left. \begin{aligned} e^{\mu} &= \frac{\alpha (1 - c^2 a^2)^2}{\varrho^{1/2} (1 - c^2 r^2)^2}, \\ e^{\nu} &= \dot{\mu}^2 / A, \\ \varrho &= \varrho(t). \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

The solution obviously involves the two arbitrary function of time  $\varrho$  and  $c$ ,  $A$  being determined in terms of  $\varrho$  and  $c$  by (9) and (12).

We note that in order that the field may be regular in the region  $0 \leq r \leq a$  we must demand

$$(7) \quad c^2 a^2 < 1.$$

### 3. The case of an oscillating sphere

We shall next investigate the nature of the solutions (14) in case  $\varrho$  and  $c$  are oscillatory functions of time. From the divergence relation  $T_{4;v}^v = 0$  we get

$$(8) \quad \dot{\varrho} = -\frac{3}{2} (p + \varrho) \dot{\mu}.$$

Substituting for  $\dot{\mu}$  we have

$$(9) \quad \frac{6 c \dot{c} (r^2 - a^2)}{(1 - c^2 r^2) (1 - c^2 a^2)} = \frac{2}{3} \frac{\dot{\varrho}}{\varrho} - \frac{p}{p + \varrho}.$$

If now we impose the restriction  $p > 0$  for  $r < a$  on physical grounds, the above equation shows that  $c \dot{c}$  and  $\dot{\varrho}$  must of opposite sign. An oscillatory behaviour consistant with these conditions is obtained if for example we assume

$$(10) \quad \left. \begin{aligned} \varrho &= \varrho_0 (1 - \alpha \cos 2 p t + \chi t^2), \\ c &= \left( \frac{\alpha}{a} \right) \cos p t, \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

<sup>3)</sup> A. Roy Chowdhury, Physic. Rev. 89, 417 (1953).

where  $\alpha < 1$  and  $\chi$  is small. The proper radius of the sphere pulsating according to (15) is given by

$$r_0 = \int_0^a e^{\mu/2} dr = \frac{\alpha^{1/2}}{\varrho^{1/2}} \frac{1}{2e} \log \frac{1+ac}{1-ac}.$$

We thus find that Einstein's equations allow an oscillation of a gravitating fluid if the pressure be non uniform and thus it appears that one way of avoiding singular states in the cosmologic solution is to introduce a non homogeneous pressure.

It is a pleasure to thank Prof. A. Papapetrou of Berlin for going through the paper before publication and making some useful suggestions.

Calcutta (India), Calcutta Engineering College Section Jadavpur Polytechnic, Jadavpur University.

Bei der Redaktion eingegangen am 28. April 1958.

## Namenregister 1958

### 7. Folge, Band 1—2

#### A

Achterberg, H. u. Michel, J., Greifswald: Einige Ergebnisse über laufende Schichten in Neon-Glimmentladungen **2**, 365.

Auth, J. u. Ridder, R., Berlin: Untersuchungen zur Ladungsträgerdiffusion und zu anderen Formen des Energietransports in CdS **2**, 351.

#### B

Böer, K. W. u. Kümmel, U., Berlin: Zur elektrostatischen Aufladung von CdS-Einkristallen unter Wirkung hoher elektrischer Felder **2**, 217.

Böer, K. W., Oberländer, S. u. Voigt, J., Berlin: Über die Auswertung von Leitfähigkeitsglowkurven **2**, 130.

Böer, K. W. u. Wantosch, H., Berlin: Nichtstationäre Vorgänge in Photoleitern. II. Langzeitiges Anklingen der Photoleitung von CdS-Einkristallen bei schwachen Anregungsintensitäten **2**, 406. Bredelow, G., Greifswald: Der Potential- und Feldstärkeverlauf im Kathodenfallgebiet von Glimmentladungen **1**, 359.

#### C

Caspary, R., Frankfurt a. M.: Lebensdauermessungen an Photoelektronen in CdS-Kristallen mit einer Kerrzellen-Apparatur **2**, 182.

#### D

Döring, W., Gießen: Die Richtungsabhängigkeit der Kristallenergie **1**, 102.

#### E

Eichhoff, G., Berlin-Buch: Das  $L_{2,3}$ -Emissionsspektrum und die Lage der

$L_{2,3}$ -Absorptionskante des S in CdS **1**, 55.

Ermisch, W. u. Seiwert, R., Berlin: Die Depolarisation der Natrium-Resonanzfluoreszenz **2**, 393.

Eshelby, J. D., Birmingham (England): The Elastic Model of Lattice Defects **1**, 116.

#### F

Feldmann, J., Potsdam: Siehe Grunewald, H., **1**, 183.

#### G

Gajewski, T., Łódź: Über die asymptotischen Phasenverschiebungen in der Methode der Partialwellen bei Streuung von Elektronen am Thomas-Fermi-Atom **1**, 232.

— Über die relativistischen Phasenverschiebungen der Partialwellen im statischen Thomas-Fermi-Streufelde **1**, 299.

Gáspár, R. u. Tamássy-Lentei, I., Debrecen: Zur Theorie der Hydridmoleküle nach dem Modell des vereinigten Atoms **2**, 208.

Geißler, D., Papapetrou, A. u. Treder, H., Berlin: Die Gravitationsstrahlung eines zeitweilig nicht stationären Systems **2**, 344.

Gerstenberg, D., Marburg/Lahn: Magnetische Untersuchungen an Pd-Mischkristallen mit Übergangselementen **2**, 236.

Gradmann, U., Marburg/Lahn: Ein Phasenkontrastmikroskop zur Messung des Phasen- und Amplitudeneinflusses isolierter Objekte **1**, 238.

Groth, R., Marburg/Lahn: Untersuchungen über die Totalreflexion weicher Röntgenstrahlen **2**, 380.

Grunewald, H. u. Feldmann, J., Potsdam: Über die elektrische Leitfähigkeit von Blei(II)-oxyd mit Zusätzen von Kaliumoxyd **1**, 183.

Grunewald, H. u. Neumann, W., Potsdam: Über die elektrische Leitfähigkeit von Blei(II)-oxyd mit Zusätzen von Neodymoxyd **1**, 198.

— Über die elektrische Leitfähigkeit von Blei(II)-oxyd mit Zusätzen höherwertiger gitterfremder Kationen **1**, 344.

Gupta, P. S., Calcutta (India): Pulsating fluid Sphere in General Relativity **2**, 421.

## H

Heisen, A., München: Über die Bildung dünner Kohleschichten in einer in Benzolatmosphäre brennenden Glimmentladung **2**, 23.

Hengevöß, J., Hamburg: Siehe Steubing, W., **2**, 191.

## J

Jahrreiß, H., Köln: Untersuchungen an Kristallspitzen bei Bestrahlung mit schnellen Elektronen **1**, 36.

Jeitsch, E., Berlin: Zum photochemischen Verhalten sensibilisierter Silberbromid- und Silberchloridkristalle bei Röntgenlichtbestrahlung **2**, 1.

— Zum photochemischen Verhalten sensibilisierter Silberhalogenide bei verschiedenartiger Bestrahlung und nach Vorbelichtung **2**, 81.

## K

Kästner, S., Berlin-Adlershof: Zur Theorie der Relaxation. I. Die thermodynamischen Grundlagen und ihre mathematische Lösung, **1**, 377.

— Zur Theorie der Relaxation. II. Elektrische Netzwerkmodelle für das Relaxationsverhalten der Materie **2**, 146.

Karnatak, R. C. Allahabad (India): siehe Varshni, Y. P., **2**, 413.

Kerimov, B., Moskau: Siehe Sokolow, A. **2**, 46.

Kockel, B., Leipzig: Die Sommerfeldsche Bodenwelle **1**, 145.

Kolodziejczyk, L., Łódź (Polen): Der kohärente Streustrahlungskoeffizient im Thomas-Fermischen Modell **2**, 54.

Krysmanski, K. H., Greifswald: Gasentmischungsvorgänge in Gleichstromglimmentladungen **2**, 263.

Kümmel, U., Berlin: Siehe Böer, K. W., **2**, 217.

Kunze, Cl., Berlin-Adlershof: Die optischen Eigenschaften von Antimontrisulfidschichten **1**, 165.

— Photoelektrische Eigenschaften von Antimontrisulfidschichten **1**, 173.

## L

Lippmann, H., Leipzig: Zur Frage des Ordnungszustandes einer im Magnetfeld orientierten Probe kristalliner Flüssigkeit bei Rotation **1**, 157.

Lippmann, H., Dresden: Die Feinstruktur der magnetischen Protonenresonanz in kristallin-flüssigem p-Azoxyanisol **2**, 287.

Lyons, D., Zeuthen-Miersdorf: Das Milne-sche Problem bei anisotroper Streuung (Anwendung auf thermische Neutronen) **1**, 400.

## M

Maushart, R., Karlsruhe: Über die Beweglichkeit positiver Ionen in extrem reinen Gasen und Gasgemischen **1**, 264.

Melicherik, J., Berlin-Adlershof: Siehe Rabenhorst, H. **1**, 261.

Michel, J., Greifswald: Siehe Achterberg, H. **2**, 365.

Mizkewitsch, N., Moskau: Zu den Invarianzeigenschaften der Lagrange-Funktionen der Felder **1**, 319.

Mollwo, L., Berlin-Adlershof: Elektronentemperatur und Elektronenrauschen in der hochfrequenten Fackelentladung **2**, 97.

Motzke, K., Jena: Über den Einfluß von Magnetfeldglühlampen auf das magnetische Verhalten und die Bereichsstruktur polykristalliner Ringproben aus Perminvar **2**, 163.

**N**

Neumann, W., Potsdam: Siehe Grunewald, H. 1, 198 u. 1, 344.  
 Neumann, W., Berlin: Die Größe der effektiven Ionisierungsspannung in Quecksilberhochdruckbögen 2, 168.  
 Nowak, W., Tietz, T., Łódź: Über eine Vereinfachung der Sommerfeldschen Polynommethode 1, 296.

**O**

Oberländer, S., Berlin: Siehe Böer, K. W. 2, 130.  
 Oertel, G., Berlin: Messungen der Sekundärelektronenemission an Selen 1, 305.

**P**

Pachner, J., Prag: Translationsbewegung und Lichtableitung im statischen kugelsymmetrischen unitären Feld 1, 110.  
 — Ergänzung zum Variationsprinzip für klassische Feldtheorien 1, 201.  
 — Die Bewegungsgleichungen der unitären Feldtheorie in der niedrigsten Näherung 1, 351.  
 — Die unitäre Feldtheorie in der Maxwell-schen Näherung 2, 36.

Papapetrou, A., Berlin: Über periodische Gravitations- und elektromagnetische Felder in der allgemeinen Relativitätstheorie 1, 186.  
 — Über zeitabhängige Lösungen der Feldgleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie 2, 87.  
 — Siehe Geissler, D., 2, 344.

Passoth, G., Bonn: Thermische Druckschwankungen in einem Gas als natürliche Grenze für Messungen der Oberflächenspannung nach der Blasendruckmethode 2, 13.

Pütter, P. S. u. Sauter, F., Köln: Zur Statistik des Plasmas. (Die dynamischen Grundgleichungen einer klassischen Statistik des Plasmas). 1, 4.

**R**

Rabenhorst, H. u. Melicherčik, J., Berlin-Adlershof: Dielektrische Eigenschaften von Bariumtitanan bei hohen

Frequenzen und tiefen Temperaturen 1, 261.

Rademacher, K. u. Wojaczek, K., Berlin: Beobachtungen an gekoppelten Niederdruckentladungen in Argon 2, 57.  
 Rawer, K. u. Suchy, K., Breisach u. Zürich: Äquivalenztheoreme bei der Wellenabsorption im Plasma 1, 255.

Rawer, K. u. Suchy, K., Breisach/Rh. u. Marburg/Lahn: Statistische Herleitung der Dispersionsformel eines Lorentz-Plasmas endlicher Temperatur 2, 313.

Ridder, R., Berlin: Siehe Auth, J. 2, 351.  
 Rompe, R., Berlin: Friedrich K. S.

Möglich 12.10.1902 bis 17.6.1957 1, 1.  
 Rössler, F., Weil am Rhein: Messung der spektralen Verteilung des UV-Standards im infraroten Bereich 1, 122.

Rother, H., Berlin: Zur Berechnung der effektiven Ionisierungsspannung in Plasmen 2, 326.

Ruske, W., Jena: Über die magnetischen Eigenschaften dünner elektrolytisch hergestellter Nickelschichten 2, 274.

**S**

Sauter, F., Köln: Siehe Pütter, S. P. 1, 4.

Schmidt, U., Marburg/Lahn: Über Auswertungsmöglichkeiten bei einem zweidimensionalen Farbschlierenverfahren 1, 203.

Schmutzler, E., Rostock: Neue Interpretation der projektiven Relativitätstheorie und Anwendung auf ein kosmologisches Modell 1, 136.

Schöpf, H.-G., Greifswald: Über den Energie-Impulstensor Diracähnlicher Felder 1, 16.

Seiwert, R., Berlin: Siehe Ermisch, W. 2, 393.

Simon, G., Gießen: Die Dämpfung elastischer Wellen hoher Frequenz in kubischen, ferromagnetischen Einkristallen 1, 23.

Sokolow, A. u. Kerimov, B., Moskau: Zur Theorie der Dirac-Teilchen mit orientiertem Spin 2, 46.

Stolz, H., Berlin: Zum Phänomen der Entelektrisierung in kleinen leitenden Körpern in einem ausgedehnten elektromagnetischen Hochfrequenzfeld 1, 334.

Strauß, H.-J., Greifswald: Untersuchungen über den Existenzbereich der elektronenlosen Ringentladung 1, 281.

Steubing, W. u. Hengevoß, J., Hamburg: Die Fowler-Linie 3203 des ionisierten Heliums im homogenen elektrischen Feld 2, 191.

Suchy, K., Zürich: Siehe Rawer, K. 1, 255.

Suchy, K., Marburg/Lahn: Siehe Rawer, K. 2, 313.

## T

Tamássy-Lentei, I., Debrecen: Siehe Gáspár, R. 2, 208.

Tichý, J., Liberec: Das elektrische Ersatzschema schwingender piezo-elektrischer Kristallstäbchen 1, 219.

Tietz, T., Lódz (Polen): Siehe Nowak, W., 1, 296.

— Streuvermögen von Atomen für Röntgen- und Elektronenstrahlen in der statistischen Theorie des Atoms 2, 41.

— Der totale Wirkungsquerschnitt und der Diffusionsstreuquerschnitt von Hartree-Potentialen 2, 387.

Treder, H., Berlin: Stoßwellen des Gravitationsfeldes 2, 225.

— Siehe Geissler, D., 2, 344.

## V

Varshni, Y. P. u. Karnatak, R. C., Allahabad (India): On Flammersfeld's Range-Energy Relation for Elektrons 2, 413.

Voigt, Fr., Berlin u. Jena: Dispersion der komplexen transversalen Suszeptibilität von Lithiumferrit im Frequenzbereich von 10—10000 MHz. 1, 86.

Voigt, J., Berlin: Siehe Böer, K. W., 2, 130.

## W

Wantosch, H., Berlin: Siehe Böer, K. W., 2, 406.

Werner, K., Leipzig: Der Einfluß hydrostatischen Druckes auf den Curiepunkt eines Ni-Zn-Ferrites 2, 403.

Wießner, W., Braunschweig: Siehe Zickner, G., 1, 70.

— Zur Kapazität des Dreiplattenkondensators 2, 329.

Wojaczek, K., Berlin: Siehe Rademacher, K. 2, 57.

— Über künstlich erzeugte laufende Schichten in der Argon-Niederdruckentladung 2, 68.

## Z

Zăgănescu, M., Timisoara (Rumänien): Der Hodograf der Bewegung eines materiellen Punktes in der relativistischen Mechanik 1, 424.

Zickner, G., u. Wießner, W., Braunschweig: Der Einfluß der Zuleitung auf die Kapazität von Kondensatoren 1, 70.

## Verantwortlich

für die Schriftleitung: Prof. Dr. G. Richter, Zeuthen-Miersdorf, Platanenallee 6; für den Anzeigen-  
teil: VEB Georg Thieme, Anzeigenabteilung, Leipzig C 1, Thomaskirchhof 20, Ruf 21005. Z. Z. gilt  
Anzeigenpreisliste Nr. 4; Verlag: Johann Ambrosius Barth, Leipzig C 1, Salomonstr. 18 B,

Fernruf: 27681, 27682, ZLN 5066

Printed in Germany

Druck: Paul Dünnhaupt, Köthen (IV/5/1) L 22/59



## **Wir entwickeln und fertigen seit 10 Jahren kernphysikalische Meßgeräte**

**Unser Lieferprogramm umfaßt:**

**Verstärker / Zählgeräte / Impulshöhenanalysatoren  
Meßplätze mit vollautomatisch arbeitendem Zubehör für Serien-  
Untersuchungen  
Kombinierbare Anordnungen in 19" Normbauweise  
Szintillationszähler / Geiger-Müller-Zählrohre  
Neutronen-Zählrohre / Ionisationskammern**

**Für den individuellen Strahlenschutz:**

Dosisleistungsmesser und Dosimeter

**Für die Strahlenüberwachung:**

Labor-Monitore sowie vollständige Anlagen zur Messung der  
Radioaktivität in Luft und Wasser

**Wir bereiten vor:**

Geräte für spezielle Probleme der Kreislaufüberwachung in  
Kernreaktoren

**Wir stellen aus:**

Leipziger Frühjahrsmesse 1959, Halle 6, Stand 194/196

Bitte benutzen Sie zur kostenlosen Anforderung unseres  
78seitigen Sammelkataloges „Strahlungsmeßgeräte“ den  
nachstehenden Gutschein

**FRIESEKE & HOEPFNER GMBH, ERLANGEN-BRUCK (DBR)**



**Gutschein**

Bitte senden Sie kostenlos Ihren 78seitigen Sammel-  
katalog „Strahlungsmeßgeräte“ an:

.....

C,  
Id's  
rons  
  
der  
lität  
eich

W.,  
  
ber,  
  
dro-  
rie-  
.ek-  
den-  
de-  
ende  
uck-

en):  
ines  
isti-  
  
aun-  
auf  
70.

gen-  
gilt  
8 B,  
  
22/59



Der weltberühmte Flügel  
SEIT  
1853

Verlangen Sie unseren Hauptkatalog über Flügel u. Pianos  
JULIUS BLÜTHNER LEIPZIG C 1  
FRIEDRICH EBERT-STR. 60  
VERTRETER-ADRESSEN AUF WUNSCH

**PRESSLER**



PHOTOZELLEN

für Wissenschaft  
und Technik

DEUTSCHE GLIMMLAMPEN-GESELLSCHAFT  
LEIPZIG C 1. BERLINER STR. 69

**Wissenschaftliche Selbstbiographie**

von MAX PLANCK

3. Auflage,

34 Seiten m. 1 Bildnis. 1955.

DIN A5. DM 1.35

(Bildet: Nr. 5. Lebensdarstellungen  
Deutscher Naturforscher. Herausgegeben  
von der Deutschen Akademie der Na-  
turforscher Leopoldina)

JOHANN AMBROSIUS BARTH  
VERLAG / LEIPZIG

**Grundlagen der Strahlenbiologie**

(Fundamentals of Radiobiology)

Von Prof. Dr. Z. M. BACQ, Liège, und Dr. P. ALEXANDER, London

Deutsche Übersetzung herausgegeben von Priv.-Doz. Dr. H.-J. Maurer, Bern  
1958. XII, 396 Seiten, 115 Abbildungen in 173 Einzeldarstellungen, Gr. 8°,  
Ganzleinen DM 49.50

Als Ende 1954 die „Principes de Radiobiologie“ von Z. M. Bacq und P. Alexander erschienen, da wurde es ganz allgemein offenbar, daß mit der Strahlenbiologie ein neues Wissenschaftsgebiet herangereift war, welches besonders im Hinblick auf die zukünftige Entwicklung der Atomtechnik eine wichtige Aufgabe zu erfüllen hat. In meisterhafter Weise haben es nun Bacq und Alexander verstanden, die bisherigen, in der wissenschaftlichen Literatur weitverstreuten radiobiologischen Ergebnisse, Erfahrungen und Erkenntnisse kritisch zusammenzufassen und so darzustellen, daß es jedem an radiobiologischen Problemen interessierten Leser ohne weiteres möglich ist, sich mit diesem Gebiet vertraut zu machen. Dem fühlbaren Mangel an einem ähnlichen Werk im deutschen Schrifttum abzuheben, hat der Georg Thieme Verlag durch die Herausgabe der vorliegenden Übersetzung Rechnung zu tragen versucht, und zwar in einer Weise, die sowohl hinsichtlich der Art der Übersetzung und Überarbeitung des Textes als auch hinsichtlich der Art der Ausstattung des Buches höchstes Lob verdient.

Langendorff, Fortschr. Röntgenstr.

In der Deutschen Demokratischen Republik beziehbar im Rahmen des Kontingents

**GEORG THIEME VERLAG · STUTTGART**

8367

1  
2  
3

105

69

4

ie

n

a

H